Math 125 _ Chap 2

23 Mars 2020

$$T(\Gamma) \subset G^+ \xrightarrow{\text{lin}} G_0^+ \hookrightarrow \mathbb{C}^1$$

On va montrer que

Théorème 2.4. *Le groupe G_0^+ (identifie a un sous-groupe de $\mathbb{C}^1$) est soit*

(1) *le groupe trivial* $\{1\}$,
(2) *le groupe d'ordre* 2, $\mu_2 = \{\pm 1\}$,
(3) *le groupe cyclique d'ordre* 3 $\mu_3 = \omega_3^{\mathbb{Z}} = \{1, \omega_3, \omega_3^2\}$, *avec* $\omega_3 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
(4) *le groupe cyclique d'ordre* 4, $\mu_4 = i^{\mathbb{Z}} = \{\pm 1, \pm i\}$,
(5) *le groupe cyclique d'ordre* 6, $\mu_6 = \omega_6^{\mathbb{Z}}$ *avec* $\omega_6 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

De plus, il existe $\gamma_0 \in \mathbb{C}^\times$ *tel que*

$T(\Gamma)$

– *Si* $G_0^+ = \mu_3$,
$$\Gamma = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3) = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_0\omega_3,$$
– *Si* $G_0^+ = \mu_4$,
$$\Gamma = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_0 i,$$
– *Si* $G_0^+ = \mu_6$,
$$\Gamma = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6) = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3) = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_0\omega_3.$$

THÉORÈME 2.2 (Fedorov pour les groupes de rotations). *Il existe 5 classes d'isomorphismes possibles pour le sous-groupe de isometrie directes $G^+ \subset G$ d'un groupe cristallographique.*

lin : $G^+ \twoheadrightarrow G_0^+ = \omega^{\mathbb{Z}}$ $\omega \in \mathbb{C}^1$ un generateur

eg. $\omega = 1$, -1, $\omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_6 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soit r une rotation de G^+ d'angle ω. $r = r_{\omega,v}$

Son centre est note z_r.

On applique au pavage $\mathcal{P} = (\mathbb{P}, I_S)$

la translation $\underbrace{t_{-z_r}}$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{P}' = (\mathbb{P}, I_S')$

$$G' = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathcal{P}'}$$

$$G' = \mathrm{Ad}(t_{-z_r})(G) = t_{-z_r} \circ G \circ t_{z_r}$$

$\rightsquigarrow$ $r' = \mathrm{Ad}(t_{-z_r})(r)$ son centre

est en O : $r'(0) = t_{-z_r}(r(z_r)) = t_{-z_r}(z_r) = 0$

G' est un groupe cristallographique isomorphe à G (ni conjugué) et qui possède une rotation linéaire r' d'angle ω le générateur de $G_0^+ = G_0'^+$.

$$T_{G'} = \mathrm{Ad}(t_{\vec{z}_r})(T_G) = T_G = T(\Gamma)$$

car les translations commutent

$$t_{-z_r} \circ t \circ t_{z_r} = t \ : \ \Gamma' = \Gamma$$

On remplace G par G', Γ par Γ' ect... On se ramène au cas où

G est tel que G^+ possède une rotation linéaire qui engendre G_0^+.

$$\to \Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1 = \gamma_0 \cdot \underbrace{(\mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\gamma_1')}_{\Gamma'}$$

$$\gamma_1' = \gamma_1 / \gamma_0$$

$$\Gamma \longrightarrow \Gamma' = \frac{1}{\gamma_0}\Gamma$$

$$\frac{1}{\gamma_0} = \frac{1}{|\gamma_0|} \times \frac{|\gamma_0|}{\gamma_0}$$

homothety de rapport $\frac{1}{|\gamma_0|}$

+ rotation d'angle $\frac{|\gamma_0|}{\gamma_0} \in \mathbb{C}'$

En appliquant au pavage $\mathcal{P}$ la même homothétie et la même rotation $\mapsto$ $\mathcal{P}'$ dont le réseau associé est $\Gamma' = \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\gamma_1'$ et G'^+ ...

Quitte à remplacer $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P}'$, Γ par Γ' et G^+ par G'^+ on peut supposer que le pavage $\mathcal{P}$ vérifie :

- $\Gamma = \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\gamma_1$ (avec 1 de module minimal parmi les élts $\neq 0$ de Γ et γ_1 .....)

- $G_0^+ = \omega^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow G^+$

$\omega \longrightarrow r_{\omega,0}$.

Soit $r \in G^+$ $\boxed{r = t_\gamma \circ r_0}$

$r_0 \in G_0^+$ $\gamma \in \Gamma$

Comme $G_0^+ \subset G^+ \rightsquigarrow r_0 \in G^+$

$$t_\gamma = r \circ r_0^{-1} \in G^+$$

$$t_\gamma \in T_G = T(\Gamma) \Longleftrightarrow \gamma \in \Gamma$$

$\Longrightarrow G^+$ est engendré par

$$T_G = T(\Gamma) \text{ et } G_0^+$$

Ainsi (apres ces substitutions) on obtient que G^+ est (isomorphe au sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$) engendre par $T(\Gamma)$ et par G_0^+, c'est a dire soit

(1) le reseau de translations $T(\Gamma)$ pour $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un reseau,
(2) le groupe engendre par la rotation lineaire $r_{-1,0}$ et le reseau de translations $T(\Gamma)$,
(3) le groupe engendre par la rotation $r_{\omega_3,0}$ et le reseau de translations $T(\Gamma)$ avec $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3$,
(4) le groupe engendre par la rotation $r_{i,0}$ et le reseau de translations $T(\Gamma)$ avec $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$,
(5) le groupe engendre par la rotation $r_{\omega_6,0}$ et le reseau de translations $T(\Gamma)$ avec $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3$.

Définition 2.10. *Soit G un groupe cristallographique contenu dans* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$ *(ie. $G = G^+$) et $\mathcal{P}$ un pavage associe. On dit que $\mathcal{P}$ est de type* $p1$, $p2$, $p3$, $p4$ *ou* $p6$ *suivant que l'ordre maximal d'une rotation contenue dans G est* 1, 2, 3, 4 *ou* 6.

p_1

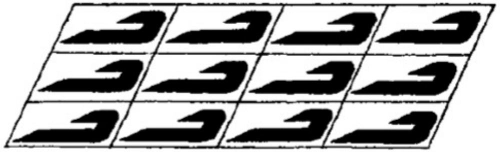


Figure 1.7.4.1

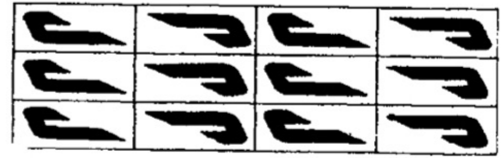


Figure 1.7.4.2

p_2

p_3

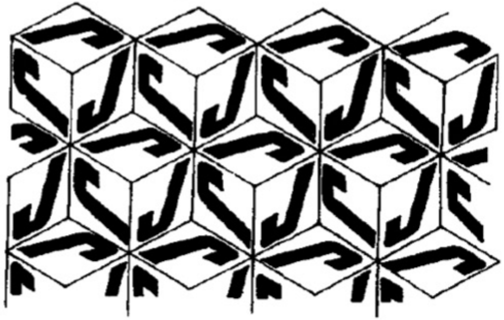


Figure 1.7.4.3

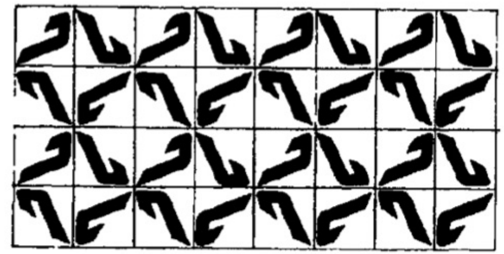


Figure 1.7.4.4

p_4

$G = G^+$

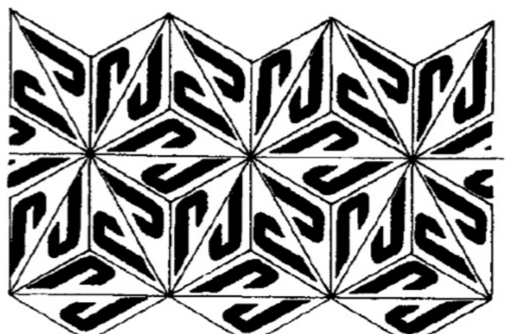
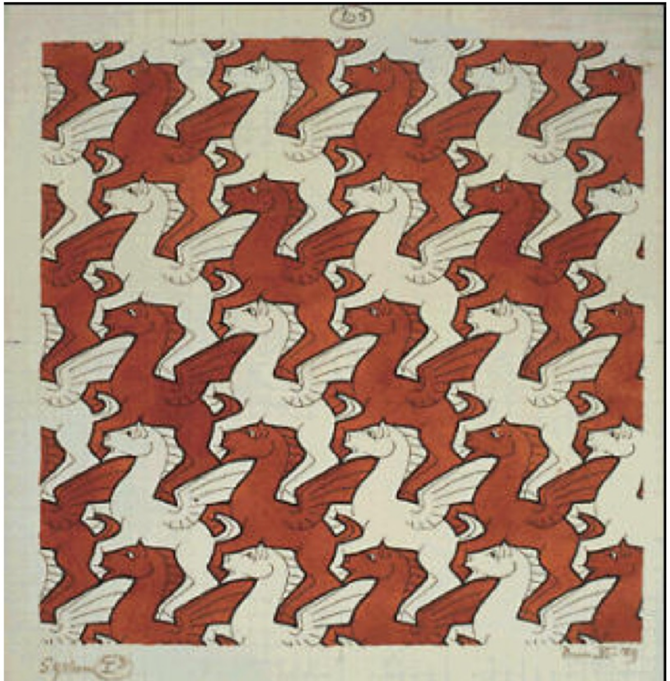
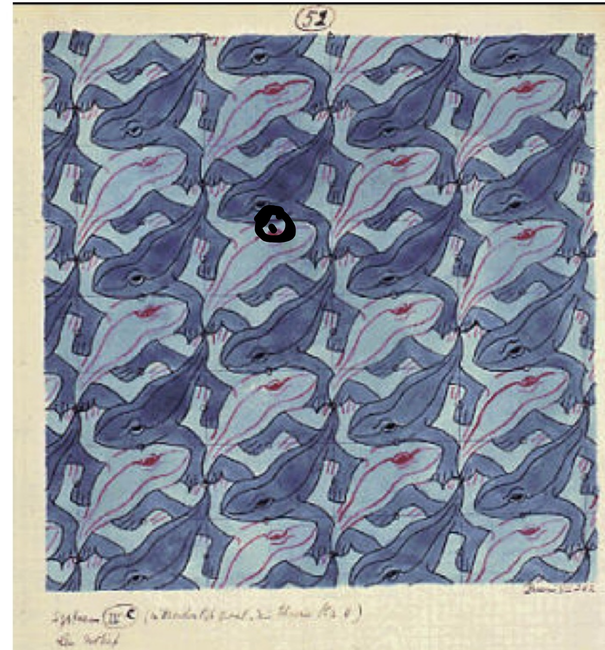


Figure 1.7.4.5
(Source: [BD])

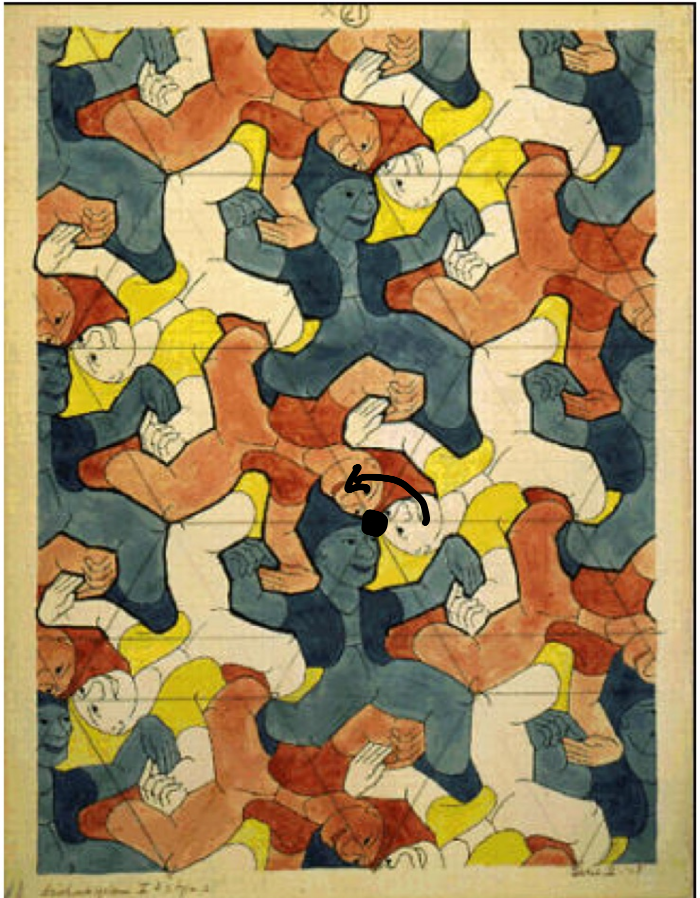
p_6



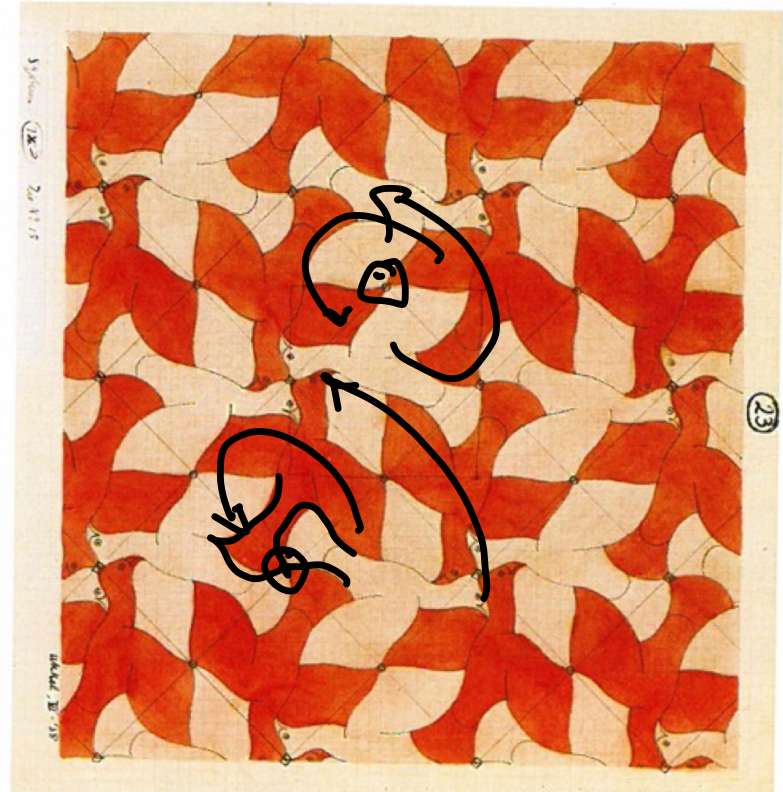
P1



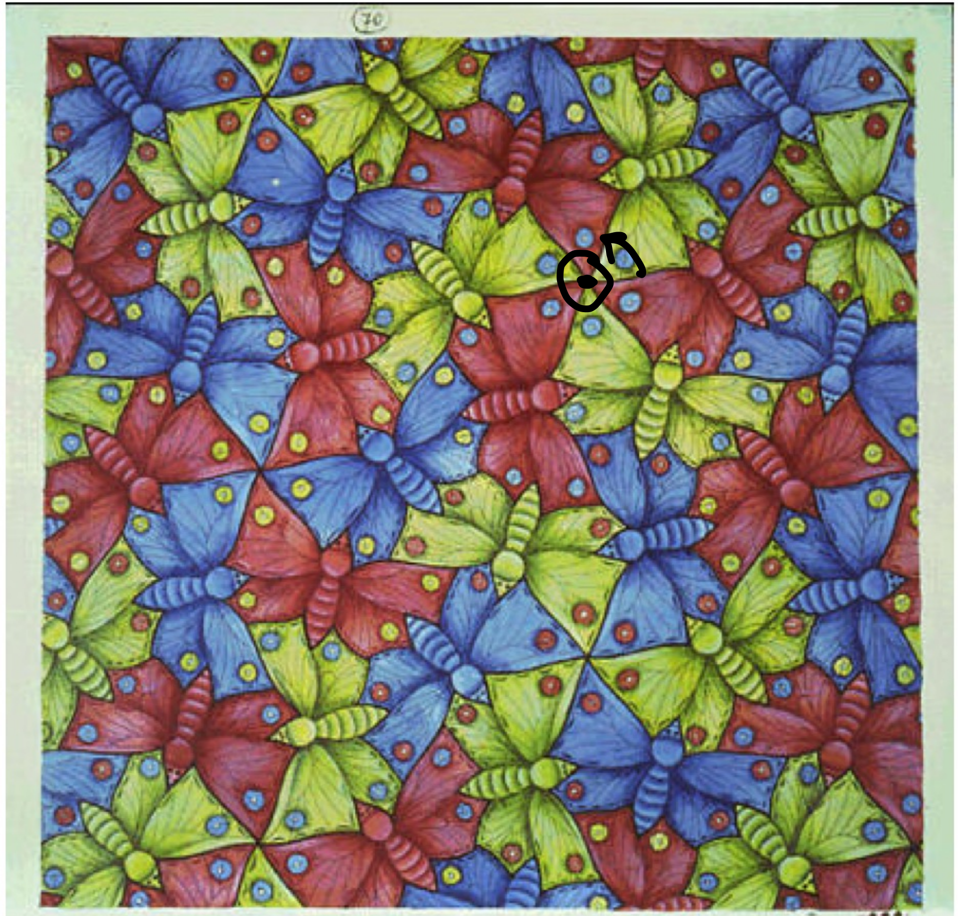
P2



P3



P4



P6

Produit semi-direct : K, H 2 gpes

$H \curvearrowright K$ action au gauche par morphismes de gpes

$h \odot k$

$\forall h : k \longmapsto h \odot k$ est un automorphisme du gpe K.

Produit semidirect $H \ltimes K$

$$H \times K = \{(h,k) \quad h \in H, k \in K\}$$

$$(h,k) * (h',k') = (h \times h', k \cdot h \odot k')$$

produit ds le gpe H

produit dans le gpe K

action $H \curvearrowright K$

loi de gpe.

Ex : Si H agit trivialement sur K : $h \odot k = k$

le produit semi direct $=$ produit direct

4.5. Optionnel: formulation en terme de groupes abstraits. En termes de groupes abstraits G^+ est isomorphe a l'un des groupes suivants

(1) isomorphe a $\mathbb{Z}^2$,
(2) le produit semi-direct $\{\pm 1\} \ltimes \mathbb{Z}^2$ ($\{\pm 1\}$ agissant sur $\mathbb{Z}^2$ par multiplications),
(3) le produit semi-direct $\omega_3^{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3$, $\omega_3^{\mathbb{Z}}$ agissant sur $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3$ par multiplications,
(4) le produit semi-direct $i^{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, $i^{\mathbb{Z}}$ agissant sur $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ par multiplications,
(5) le produit semi-direct $\omega_6^{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6$, $\omega_6^{\mathbb{Z}}$ agissant sur $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6$ par multiplications.

(1) $\mathbb{Z}^2$,

(2) le produit semi-direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$, $1 \pmod 2$ agissant sur $\mathbb{Z}^2$ par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(3) le produit semi-direct $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$, $1 \pmod 3$ agissant sur $\mathbb{Z}^2$ par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(4) le produit semi-direct $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$, $1 \pmod 4$ agissant sur $\mathbb{Z}^2$ par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(5) le produit semi-direct $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$, $1 \pmod 6$ agissant sur $\mathbb{Z}^2$ par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION 2.2. *Soit $G \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ un sous-groupe d'isometries tel qu'il existe une tuile **P** telle que*

$$\mathcal{P}(\mathbf{P}, G) = \{g.\mathbf{P},\ g \in G\}$$

forme un pavage du plan. On dit alors que G est un groupe paveur.

I_S = Groupe

— THÉORÈME 2.5. *Soit G un groupe paveur de pavage associe $\mathcal{P}$; soit $G_{\mathcal{P}}$ son groupe d'isometries. Alors $\mathcal{P}$ est un pavage regulier (ie. $G_{\mathcal{P}}$ est cristallographique) et G est d'indice fini dans $G_{\mathcal{P}}$. Par ailleurs le theoreme de Fedorov est valide pour G: G appartient a l'une des 17 classes d'isomorphisme de groupes du Theoreme de Fedorov et G^+ est isomorphe a l'un des 5 groupes du Theoreme 2.2.*

$G \subset G_{\mathcal{P}}$ d'indice fini

Rmq: Si G est pavem alors $G < G_{\mathcal{P}}$

$\mathcal{P} = (\mathbb{P}, G)$

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathcal{P}}$$

Preuve: le pavage est un recouvrement de $\mathcal{P}$

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in G} g(\mathbb{P})$$

Rmq: $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$

$g(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$

Soit $g' \in G$ alors le pavage

$$g' \cdot \mathcal{P} = (\mathbb{P}, g' \circ G) = \mathcal{P}$$

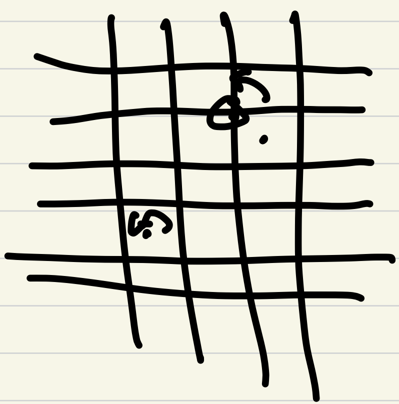
$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in G} g' \circ g(\mathbb{P})$$ comme G est un gpe

$$g' \circ G = G$$

$\leadsto$ $g' \in G_{\mathcal{P}}$.

Rmq : $G \subsetneq G_{\mathcal{P}}$ $\boxed{G_{\mathcal{P}}/G < \infty}$

Exemple $P = \square$ $G = T(\mathbb{Z}^2)$



$\mathcal{P} = (\square, T(\mathbb{Z}^2))$

$G_{\mathcal{P}}$ contient des rotations d'ordre 4, des symétries axiales et glissée...

Théorème 2.6. *Soit G un groupe paveur et T_G son sous-groupe des translations. Alors $T_G = \underline{T(\Gamma)}$ est un reseau de translations: il existe $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$, $\mathbb{R}$-lineairement independants tels que $\underline{\Gamma = \mathbb{Z}.\gamma_0 + \mathbb{Z}.\gamma_1}$. En particulier $\mathcal{P}$ est un pavage regulier.*

Preuve : 1) G est un gpe infini

- Si G etait fini $\bigcup_{g \in G} g(\mathbb{P})$ serait borné $\neq \mathbb{R}^2$

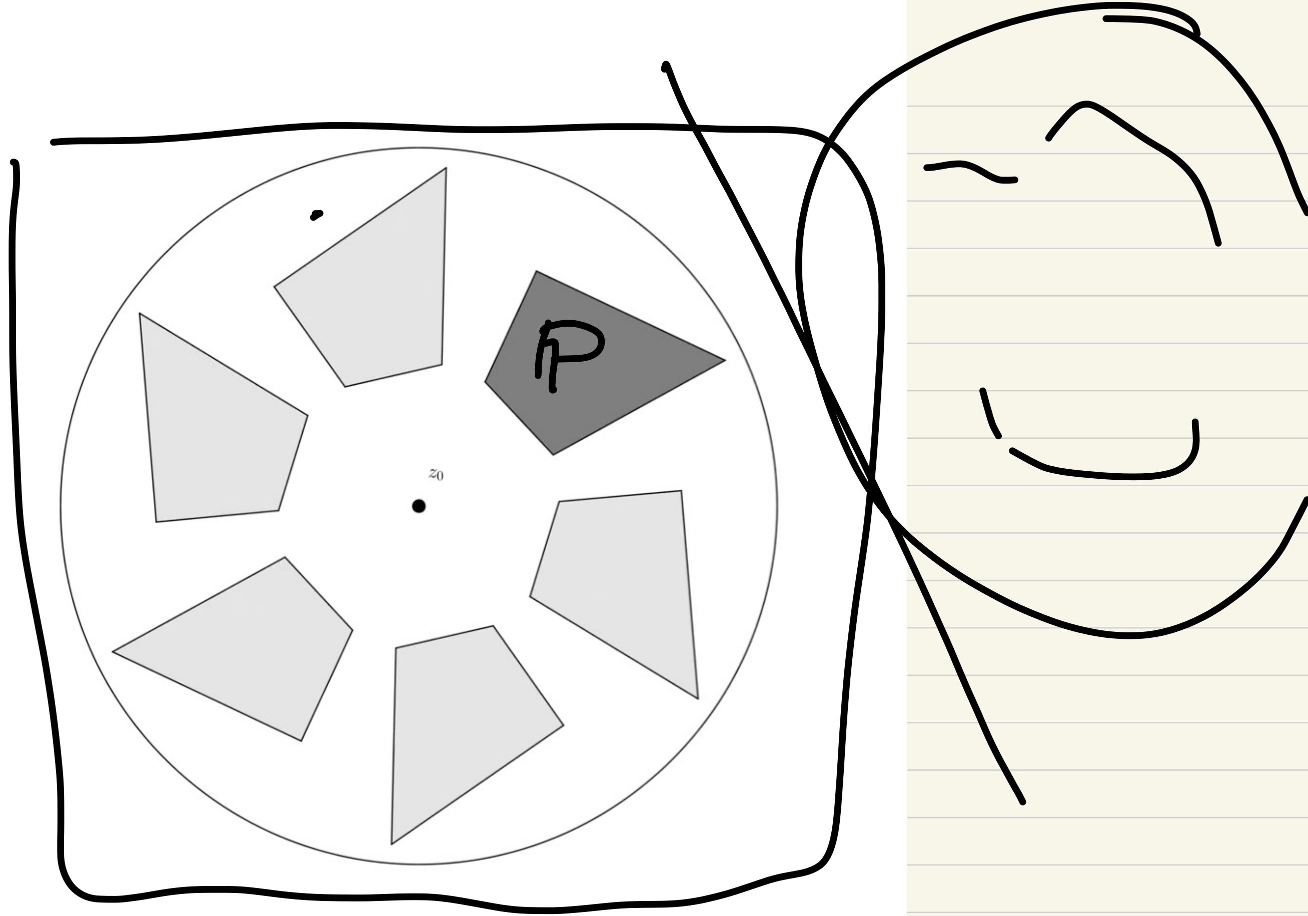
- $G^+ \subset G$ G^+ est infini.

Si G^+ était fini et $G \neq G^+$ soit s dans $G \setminus G^+$ (une symétrie)

$\Longrightarrow G = G^+ \sqcup s \circ G^+$ serait fini si G^+ était fini. $\searrow G/G^+$ est d'ordre 2.

- Il existe dans G^+ deux rotations de centres distincts.

Sinon, si tous les élts de G^+ avaient le même centre


P
z_0

soient $r, r' \in G^+$ de centre $z \neq z'$, et d'angles $\alpha, \alpha' \neq 1$ $\Longrightarrow$

$$[r,r'] = r \circ r' \circ r^{-1} \circ (r')^{-1} \in G^+$$

si α et α' sont les angles de r et r'

l'angle $[r,r']$ vaut $\alpha . \alpha' . \alpha^{-1} . \alpha'^{-1} = 1$

$\Longrightarrow [r,r']$ est une translation non triviale si $[v,v']$ était triviale les centres seraient confondus.

- Le raisonnement marche si l'un des angle est trivial et l'autre non.

- si les angles α et α' sont tous les deux triviaux : r et r' sont des translation

$$\Rightarrow [v,v'] = Id_{\mathbb{R}^2}.$$

$\longmapsto G^+$ possède une translation $\neq Id$.

- $t_\gamma \in G\ \gamma \neq 0$. $T_G \neq \{Id\}$

Supposons que $T_G \subset T(\mathbb{R}\gamma)$
Toutes les translation de G sont par des vecteurs colinéaires à γ

- Si $G^+ = T_G \subset T(\mathbb{R}_\gamma)$ impossible

si $G^+ = G$

si $G^+ \neq G$ $\quad G = G^+ \cup s G^+$

$= T(\mathbb{R}_\gamma) \cup s \circ T(\mathbb{R}_\gamma)$

- Supposons que $T_G \subset T(\mathbb{R}_\gamma)$

et $G^+ \neq T_G$ il existe

r d'angle $\alpha \neq 1$

$G^+ \ni \mathrm{rot}\, t_\gamma \circ r^{-1} = t_{r_\alpha(\gamma)}$ où r_α est la partie linéaire de r

- si $\alpha \neq -1$ $r_\alpha(\gamma)$ n'est pas colinéaire à γ et $\gamma' = r_\alpha(\gamma)$ est $\mathbb{R}$-lin indep de γ

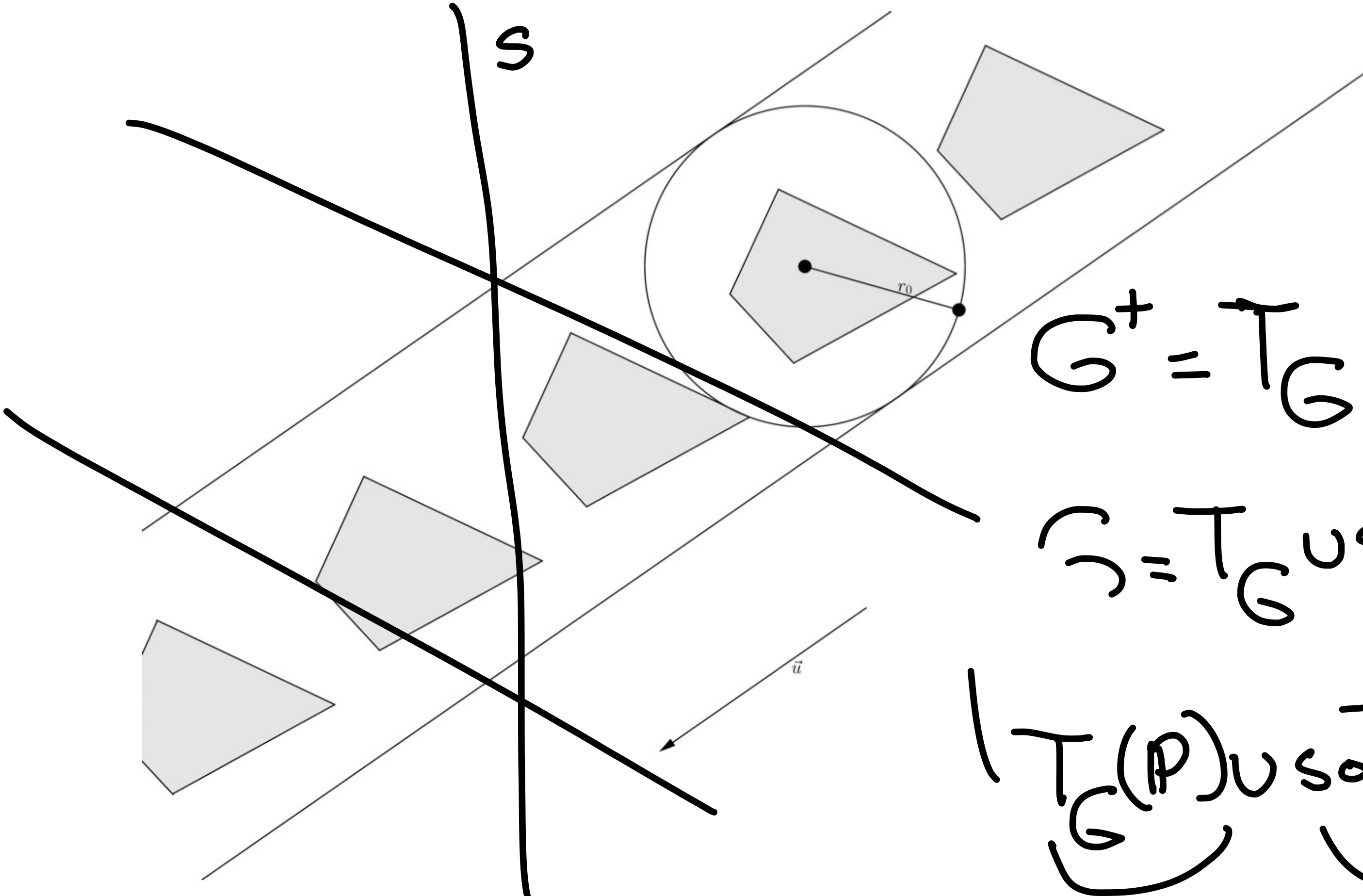
$\Rightarrow T_G \ni t_\gamma, t_{r_\alpha(\gamma)}$.

- si $\alpha = -1$ si les seules rotation de G^+ sont d'angle ± 1

$\mathbb{R}^2$ ne peut etre recouvert par la reunion de 4 bandes

Donc ce cas est exclus

$\Rightarrow$



$$G^+ = T_G$$

$$G = T_G \cup s \circ T_G$$

$$\setminus \underbrace{T_G(P)} \cup \underbrace{s \circ T_G(R)}$$

G_p/G est fini :

LEMME 2.4. *Soit G un groupe et $K \subset H \subset G$ des sous-groupes. Alors les conditions suivantes sont equivalentes:*

1. (1) G/K *est fini.*
2. (2) G/H *et* H/K *sont finis.*

deplus, on a la relation entre cardinaux

$$|G/K| = |G/H|.|H/K|.$$

Preuve : exercise. $\square$

On va utiliser ce Lemme pour montrer la proposition

PROPOSITION 2.5. *Soit* $\Gamma' \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *deux reseaux contenus l'un dans l'autre, alors le groupe quotient (*Γ *est commutatif)* Γ/Γ' *est fini.*

Chap 3 : Espace Euclidien et ses Isometries

Espace Affines

Définition 3.1. *Soit G un groupe et X un G-ensemble. X est un espace principal homogene sous l'action de G si*

(1) *G agit transitivement sur X: pour tout $x \in X$, $X = G.x$.*
(2) *Pour tout $x \in X$, le stabilizateur G_x est trivial.*

PROPOSITION 3.1. *Soit X un espace principal homogene alors pour tout $P_0 \in X$, l'application*

$$t_\bullet(P_0) : g \in G \mapsto g.P_0 \in X$$

est une bijection. En d'autre termes pour tout $Q \in X$, il existe un unique $g \in G$ tel que

$$g.P_0 = Q.$$

L'application $t_\bullet(P_0)$ est meme un isomorphisme de G-ensemble pour G agissant sur lui-meme par multiplication a gauche.

Proposition 3.2. *Soit X un espace principal homogene sous l'action de G. L'application*

$$t_\bullet : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \mathrm{Bij}(X) \\ g & \mapsto & t_g : P \to g.P \end{array}$$

est un morphisme de groupes injectif. Son image

$$t_G = T(G) \simeq G$$

est appelle le groupe des translations de X pour l'action de G.

Définition 3.2. *Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie sur un corps k; un espace affine X sous V est un V-ensemble (quand on voit V comme le groupe additif $(V,+)$) qui est un espace principal homogene; on dit que V est la direction de X. On notera cette action additivement:*

$$\begin{array}{ccc} V \times X & \mapsto & X \\ (\vec{v}, P) & \mapsto & \vec{v} \oplus P \end{array};$$

Ainsi on a

$$(\vec{v} + \vec{w}) \oplus P = \vec{v} \oplus (\vec{w} \oplus P).$$

Dans cette egalite le premier "+" est la loi d'addition dans le group $(V,+)$ et les trois "$\oplus$" suivants sont relatifs a l'action.

– *Le groupe des translations de X sous l'action de V sera note*

$$T(V) = t_V = \{t_{\vec{v}} : P \mathfrak{n} X \mapsto \vec{v} \oplus P \in X,\ \vec{v} \in V\} \subset \mathrm{Bij}(X).$$

$P + \vec{v}$ ou bien $\vec{v} + P$.

Définition 3.3. *Soit X un espace affine de direction V, on defini la dimension de X comme etant la dimension de V :*

$$\dim(X) = \dim(V).$$

Un espace affine de dimension 0 est un point; de dimension 1 une droite; un espace affine de dimension 2 un plan.

Un exemple evident d'espace affine X sous V est l' espace vectoriel V lui-meme ! D'autres exemples sont donnes par la notion de sous-espaces affines

Définition 3.4. *Soit X un espace affine de direction V; un sous-espace affine de X est l'orbite d'un point P sous l'action d'un sous-espace vectoriel $W \subset V$*

$$Y := P + W = \{P + \vec{w},\ \vec{w} \in W\}.$$

On dit que Y est le sous-espace affine de direction W passant par P. On a $\dim Y = \dim_k W$.

Un sous-espace affine de dimension $\dim Y = \dim X - 1$ est appelle hyperplan affine.

Relations de Chasles