Math 125 - Chap 3

Espaces Affines & Euclidiens

6 avril 2020

DÉFINITION 3.1. *Soit G un groupe et X un G-ensemble. X est un espace principal homogene sous l'action de G si*

(1) *G agit transitivement sur X: pour tout $x \in X$, $X = G.x$.*
(2) *Pour tout $x \in X$, le stabilizateur G_x est trivial.*

Espace Affine := Espace principal homogène sous l'action $(V, +)$ où V est un k-espace vectoriel.

Si X est affine, V = direction de X

fixe $P_0 \in X$

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow X \\ \vec{v} &\longrightarrow \vec{v} + P_0 = P_0 + \vec{v} \end{aligned}$$ est bijective.

Ex : Dans $\mathbb{R}^3$ $X = \{(x,y,1) \quad x,y \in \mathbb{R}\}$

X est un espace affine pour l'action du SEV de $\mathbb{R}^3$ $V = \{(x,y,0) \; x,y \in \mathbb{R}\}$

- Sous-espace affine $Y \subset X$ est un espace affine pour l'action, par restriction à W, d'un SEV $W \subset V$

Relations de Chasles

X un espace affine de direction V

Soient $P, Q \in X$ alors il existe un <u>unique</u> vecteur $\vec{v}$ qui envoie P sur Q

$$P + \vec{v} = Q$$

Notation : - on note $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

- $\overrightarrow{PQ} = Q - P$

On a alors

$$P + \overrightarrow{PQ} = P + (Q - P) = Q$$

On a alors la

Proposition 3.3 (Relation de Chasles). *Pour tout $P, Q, R \in X$ on a*

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$$

En particulier

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

Preuve : $\overrightarrow{PR}$ est l'unique vecteur qui envoie P sur R

on va mq $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ envoie P sur R.

transitivité de l'action

$$P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR}$$

$$= Q + \overrightarrow{QR} = R \qquad \square$$

$$R = P + (R - P)$$
$$= P + (Q - P) + (R - Q).$$

<u>Rmq</u>: Dans un espace affine on ne peut pas ajouter des point "$P+Q$" mais on peut les "soustraire"

$$X \times X \longrightarrow V$$
$$(P, Q) \longmapsto Q - P$$

vecteur) se generalise de la maniere suivante.

Proposition 3.4. *Soit $n \geqslant 1$, $P_1, \cdots P_n \in X$, n points et $\mu_1, \cdots, \mu_n \in k$, n scalaires tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0_k.$$

Alors etant donne $P_0 \in X$ le vecteur

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (P_i - P_0) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{P_0 P_i} \in V$$

ne depend pas du choix de P_0. On notera ce vecteur

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i.$$

Generalise la notation $Q - P$

$n = 2$ $\mu_1 = 1_k$ $\mu_2 = -1_k$

Preuve : soit $P_0' \in X$ et on veut mq

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{P_0P_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{P_0'P_i}$$

on calcule la différence

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{P_0P_i} - \mu_i \overrightarrow{P_0'P_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(\overrightarrow{P_0P_i} - \overrightarrow{P_0'P_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(\overrightarrow{P_0P_i} + \overrightarrow{P_iP_0'}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \overrightarrow{P_0P_0'}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{P_0P_0'} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)}_{= 0_K} \cdot \overrightarrow{P_0P_0'} = \vec{0}_V$$

$\square$

Proposition 3.5. *Soient X un espace affine, $n \geqslant 1$, $(P_1, \cdots, P_n) \subset X^n$ un n-uple de points et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in k^n$ un n-uple de scalaires verifiant*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1_k.$$

λ

Soit $P_0 \in X$ un point de X alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i - P_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i + (-1) P_0$ est bien defini et le point translate

$$P_0 + (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i - P_0) \in X$$

ne depend pas du choix de P_0. On l'appelle le barycentre (algebrique) des points $(P_1, \cdots, P_n)$ par rapport aux poids $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et on le note

$$Bar(P_1, \cdots, P_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

Si tous les poids sont egaux ($\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ de sorte que $\sum_i \lambda_i = n.\lambda_1 = 1_k$) on note ce barycentre

$$Bar(P_1, \cdots, P_n).$$

$\lambda_0 := -1$ $\quad$ $\underbrace{(-1)P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i} = \text{Vecteur}$

Preuve : Soit P_0' un autre point

on veut mq le vecteur qui envoie le barycentre construit à partir de P_0 sur ______ P_0'

vecteur $\vec{0}_V$. On ferme la différence

$$P_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i - P_0\right) - \left[P_0' + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i - P_0'\right)\right]$$

$$= \boxed{(P_0 - P_0')} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - P_i) + \boxed{(P_0' - P_0)} =$$

$$P_0 - P_0' + \vec{O_V} + P_0' - P_0 = \overrightarrow{P_0'P_0} + \overrightarrow{P_0P_0'}$$
$$= \vec{O_V}.$$

$\square$

On peut former des combinaison linéaires de pts dans un espace affine et obtenir un point si les coef de la CL ont 1_k pour somme.

Par exemple : $n=2$ P_1, P_2

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ (si 2 n'est pas nul ds k)

$\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$ = le milieu de $P_1 P_2$.

⋮

⟿ Coordonnées Barycentriques d'un espace affine.

DÉFINITION 3.1. *Soit X un espace affine de dimension d et de direction V ; un $d+1$-uplet de points*

$$P_0, P_1, \cdots, P_d \in X$$

est en position generale si les vecteurs

$$\vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_d} \in V$$

forment une base de V. On dira que $(P_0, \cdots, P_d)$ forme une base affine de X.

Exercice : Si on on choisit un autre point que P_0 (cad P_1 ou $P_2, \ldots, P_d$) alors les d nouvelles différences forment encore une base de V : par exemple $(\vec{P_dP_0}, \vec{P_dP_1}, \ldots, \vec{P_dP_{d-1}})$

Définition-Proposition 3.1. *Soient X un espace affine de dimension d et*

$$P_0, \cdots, P_d \in X$$

en position generale. Pour tout point $P \in X$ il existe un unique $d+1$-uplet

$$(\lambda_0, \cdots, \lambda_d) \in k^{d+1}$$

tel que

$$\boxed{\lambda_0 + \cdots + \lambda_d = 1}$$

et

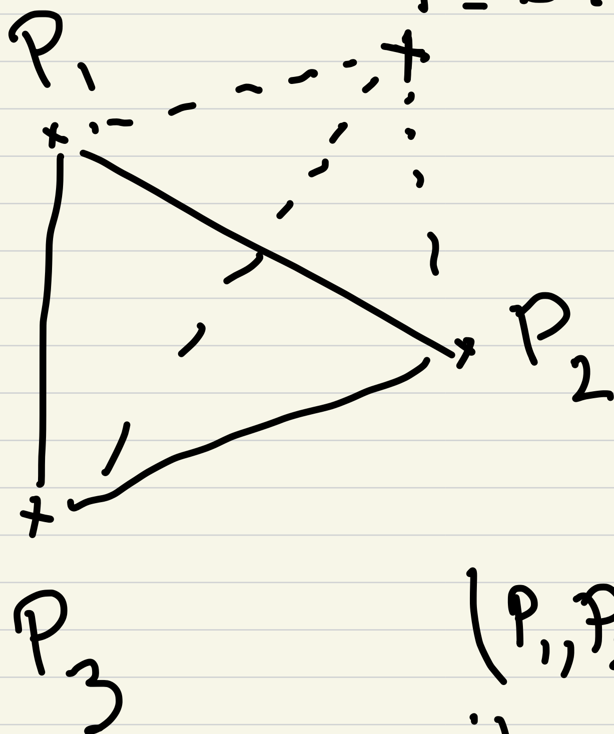
$$\boxed{P = Bar(P_0, \cdots, P_d; \lambda_0, \cdots, \lambda_d).}$$

Le $d+1$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_d)$ sont les coordonnees barycentriques de P dans la base affine $(P_0, \cdots, P_d)$.

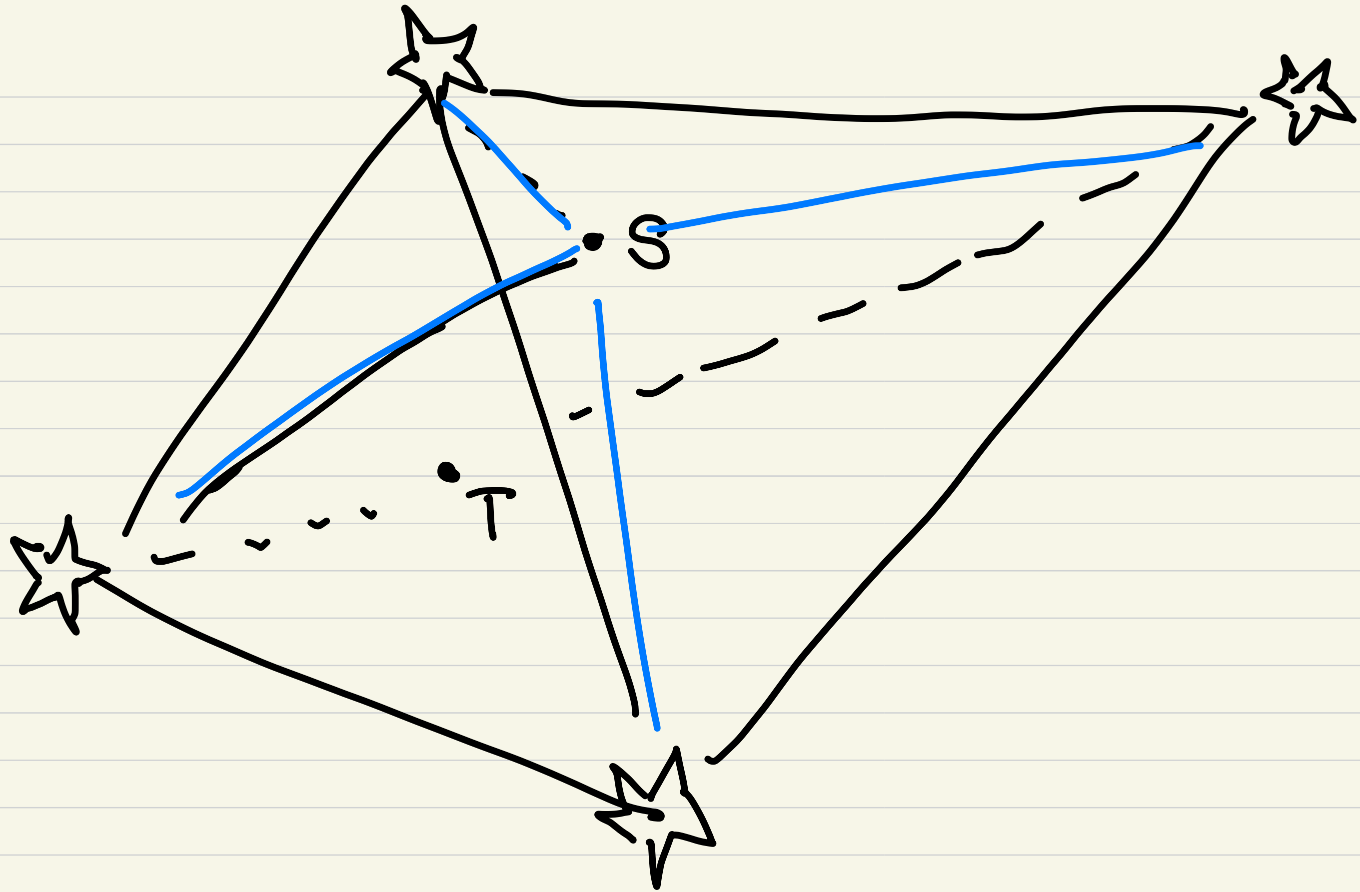
Exercice : le fait qu'il existe un unique vecteur qui envoie P_0 sur P $\overrightarrow{P_0P}$
et que $\overrightarrow{P_0P}$ se decoupe de manière unique en combinaison linéaire des vecteurs $(\overrightarrow{P_0P_1}, \cdots, \overrightarrow{P_0P_d})$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in k^3$ forment les coord barycentriques de P ds la base affine (P_1, P_2, P_3)

$P = \mathrm{Bar}(P_1, P_2, P_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$



(P_1, P_2, P_3) en position générale


S
T

Une base affine :

- une famille (affine) generatrice

card $\geq d+1$ tout P peut etre obtenu comme barycentre des pts de la famille

- une famille (affine) libre si

card $\leq d+1$ un barycentre des pts de la famille l'est pour un unique pts

Définition 3.5. *Un sous-espace affine $Y \subset X$ est un sous-ensemble de X obtenu comme l'ensemble de tous les barycentres possibles de $n+1$ points de X $P_0, \cdots, P_n \in X$ pour $n \geqslant 0$ un entier:*

$$Y = \{Bar(P_0, \cdots, P_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_n),\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in k,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}.$$

On dira alors que Y est le sous-espace affine engendre par $P_0, \cdots, P_n$ ou encore passant par $P_0, \cdots, P_n$.

1.3. Morphismes d'espaces affines.

Définition 3.2. *Soient X et Y deux espaces affines (de directions V et W). Une application $\varphi : X \to Y$ est dite affine si elle preserve les barycentres: pour tout $(P_1, \cdots, P_n) \subset X^n$ et tout $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in k^n$ verifiant*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

on a

$$\varphi(\overbrace{Bar(P_1, \cdots, P_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_n)}^{\in X}) = \overbrace{Bar(\varphi(P_1), \cdots, \varphi(P_n); \lambda_1, \cdots, \lambda_n)}^{\in Y}.$$

On en deduit immediatement la

Proposition 3.6. *La composee de deux applications affines est affine; la reciproque d'une application affine bijective est affine.*

$\varphi : X \to Y \quad \psi : Y \to Z$ affines

$\psi \circ \varphi : X \to Z$ affine

Théorème 3.1. *Soit X, Y deux espace affines (de directions V et W). Une application $\varphi : X \to Y$ est affine si et seulement si pour $P_0 \in X$ l'application definie par*

$$\boxed{\varphi_0} : \begin{array}{ccc} V & \mapsto & W \\ \vec{v} & \mapsto & \varphi_0(\vec{v}) = \varphi(P_0 + \vec{v}) - \varphi(P_0) \end{array}$$

est lineaire. Dans ce dernier cas l'application φ_0 ne depend pas du choix du point P_0. On l'appelle la partie lineaire de φ. On a la formule suivante:

$$\forall P \in X, \vec{v} \in V,\ \varphi(P + \vec{v}) = \varphi(P) + \varphi_0(\vec{v}).$$

__Preuve__ : on fixe P_0 et on pose

$$\varphi_0(\vec{v}) = \varphi(P_0 + \vec{v}) - \varphi(P_0)$$

$$\varphi_0(\vec{0}) = \varphi(P_0) - \varphi(P_0) = \vec{0}$$

$\lambda \in k$
$\vec{u}, \vec{v} \in V$ $\quad \varphi_0(\vec{u} + \lambda \vec{v}) \overset{?}{=} \varphi_0(\vec{u}) + \lambda . \varphi_0(\vec{v})$

$$P = P_0 + \vec{u} \qquad Q = P_0 + \vec{v} \qquad \mu = 1 - (1+\lambda) \in k$$

$$\varphi\left(\mathrm{Bar}(P, Q, P_0 ; 1, \lambda, \mu)\right)$$

$$= \mathrm{Bar}\left(\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(P_0) ; 1, \lambda, \mu\right)$$

φ est affine.

$$\varphi\big(\underbrace{\mathrm{Bar}(P, Q, P_0; \dots)}\big) = P_0 + (P - P_0) + \lambda(Q - P_0)$$

$$= \varphi\big(\underline{P_0} + \underline{\vec{u} + \lambda\vec{v}}\big)$$

$$\varphi\big(\mathrm{Bar}(P, Q, P_0; \dots)\big) = \mathrm{Bar}\big(\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(P_0) \dots\big)$$

$$= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q) + \mu\varphi(P_0)$$

$$= \varphi(P_0) + \big(\underline{\varphi(P) - \varphi(P_0)}\big)$$

$$+ \lambda\big(\varphi(Q) - \varphi(P_0)\big)$$

$$= \cancel{\varphi(P_0)} + \varphi_0(\vec{u}) + \lambda \varphi_0(\vec{v})$$

$$= \cancel{\varphi(P_0)} + \varphi_0(\vec{u} + \lambda \vec{v})$$

$$\varphi_0(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \varphi_0(\vec{u}) + \lambda \varphi_0(\vec{v})$$

est lineaire.

Ne depend pas du choix de P_0

Soit $P_0' \in X$

$$\varphi_0'(\vec{v}) := \varphi(P_0' + \vec{v}) - \varphi(P_0')$$

$$\boxed{\varphi_0' = \varphi_0 \ ?}$$

$$P_0' = P_0 + \overrightarrow{P_0 P_0'} = P_0 + (P_0' - P_0)$$

$$\boxed{\varphi'_0(\vec{v})} = \varphi(P'_0 + \vec{v}) - \varphi(P'_0)$$

$$= \varphi\left(P_0 + \overrightarrow{P_0P'_0} + \vec{v}\right) - \varphi\left(P_0 + \overrightarrow{P_0P'_0}\right)$$

$$= \cancel{\varphi(P_0)} + \varphi_0\left(\overrightarrow{P_0P'_0} + \vec{v}\right) - \left[\cancel{\varphi(P_0)} + \varphi_0\left(\overrightarrow{P_0P'_0}\right)\right]$$

$$= \varphi_0\left(\overrightarrow{P_0P'_0} + \vec{v}\right) - \varphi_0\left(\overrightarrow{P_0P'_0}\right)$$

$$= \varphi_0\left(\overrightarrow{P_0P'_0}\right) + \varphi_0(\vec{v}) - \varphi_0\left(\overrightarrow{P_0P'_0}\right) = \boxed{\varphi_0(\vec{v})}$$

φ_0 lineare

COROLLAIRE 3.1. *Soit V un k-espace vectoriel et φ un endomorphisme affine de V sur V alors φ de decompose de maniere unique sous la forme*

$$\varphi = t_{\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi_0$$

ou φ_0 est la partie lineaire.

$X = V$ k-ev V agit sur V par translation

$$\varphi(P) = \varphi(\vec{0}) + \varphi_0(P)$$

<u>Preuve</u>: on prend $P_0 = \vec{0}$

$$= t_{\varphi(\vec{0})} \circ \varphi_0(P)$$

$$\varphi(P) = \varphi(P + \vec{0}) = \varphi(\vec{0}) + \varphi_0(P) \quad \square$$

Proposition 3.7 (Composition d'applications affines). *Soit X, Y, Z des espaces affines et $\varphi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ des applications affines alors $\psi \circ \varphi : X \to Z$ est affine et sa partie lineaire est*

$$\boxed{(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0.}$$

– *Supposons que $\varphi : X \to Y$ est bijective alors sa reciproque φ^{-1} est affine et $(\varphi^{-1})_0 = \varphi_0^{-1}$.*

$$\psi \circ \varphi(P_0 + \vec{v}) = \psi(\varphi(P_0 + \vec{v}))$$

$$= \psi(\varphi(P_0) + \varphi_0(\vec{v}))$$

$$= \psi(\varphi(P_0)) + \psi_0(\varphi_0(\vec{v}))$$

$$= \psi \circ \varphi(P_0) + \psi_0 \circ \varphi_0(\vec{v})$$

$$\psi \circ \varphi(P_0) + (\psi \circ \varphi)_0(\vec{v})$$

On deduit cette proposition le corollaire suivant concernant les isomorphismes affines.

Corollaire 3.2. *L'application "partie lineaire"* $\mathrm{lin} : \varphi \in A\,\mathrm{GL}(X) \mapsto \varphi_0 \in \mathrm{GL}(V)$ *est un morphisme de groupe de noyau le groupe des translations* $T(V)$*. En particulier* $T(V)$ *est distingue dans* $A\,\mathrm{GL}(X)$.

Corollaire 3.3. *Soit $\varphi : X \to Y$ une application affine.*

- *Son image $Y' = \operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace affine de Y sous l'action de $W' = \operatorname{Im}\varphi_0$.*
- *Pour tout $y \in Y$, la preimage*

$$\varphi^{-1}(\{y\}) = \{x \in X,\ \varphi(x) = y\}$$

  est soit l'ensemble vide (si $y \notin Y$) ou un sous-espace affine de X sous l'action de $\ker(\varphi_0)$.
- *On a la relation*

$$\dim X = \dim V = \dim(\ker\varphi_0) + \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

- *Plus generalement, l'image et la preimage d'un sous-espace affine de X (resp. Y) est un sous espace affine (eventuellement l'ensemble vide pour la preimage).*

Corollaire 3.4. *Une application affine* $\varphi : X \to Y$ *est injective si et seulement si* φ_0 *l'est (c.a.d* $\ker \varphi_0 = \{0_V\}$*).*

–*Une application affine* $\varphi : X \to Y$ *est surjective si et seulement si* φ_0 *l'est.*

–*Une application affine* $\varphi : X \to Y$ *est surjective si et seulement si* $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim Y$

–*Une application affine* $\varphi : X \to Y$ *est un isomorphisme affine si et seulement si* φ_0 *est bijective.*

Espace Euclidien $\mathbb{R}^n$ $(n=3)$

Définition 3.7. *La longueur euclidienne d'un vecteur* $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$ *est donnee par*

$$\|\vec{u}\| = \|(x_1, \cdots, x_n)\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

La distance euclidienne dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$ *est la fonction*

$$d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

donnee pour $P = (x_1, \cdots, x_n)$ *et* $Q = (x'_1, \cdots, x'_n)$ *par*

$$d(P, Q) = ((x_1 - x'_1)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2)^{1/2} = \|\vec{PQ}\|.$$

Théorème 3.2. *La fonction longueur (resp. distance) a les proprietes suivantes*

- *Separation des points: pour tout* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\vec{u}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \mathbf{0}, \ d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q.$$

- *Inegalite du triangle:*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \ d(P,R) \leqslant d(P,Q) + d(Q,R)$$

avec egalite si et seulement si P, Q, R *sont alignes (cad* $\vec{PQ}$ *et* $\vec{PR}$ *sont proportionels) et que* Q *est "entre"* P *et* R *(ie contenu dans le segment*

$$[P,R] = \{Q = \lambda.P + (1-\lambda).R, \ \lambda \in [0,1]\}).$$

- *Homogeneite:*

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|, \ d(\lambda.P, \lambda.Q) = |\lambda| d(P,Q)$$

avec $\lambda.P = (\lambda.x_+, \cdots, \lambda.x_n)$ *l'image de* P *par l'homothetie de centre* $\mathbf{0}$ *et de rapport* λ*:* $\lambda.(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Produit Scalaire Euclidien

$$\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \pm 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \tag{2.1}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\|) \tag{2.2}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \tag{2.3}$$

Proposition 3.8 (Inegalite de Cauchy-Schwarz). *On a*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leqslant \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

avec egalite si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont proportionels:* $\vec{u} = \mathbf{0}$ *et alors* $\vec{u} = 0.\vec{v}$ *ou bien*

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

- Distance sur un espace affine euclidien

Définition 3.9. *Deux vecteurs* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *tels que* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, *sont dit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux ou perpendiculaires*

Proposition 3.9. *Soient* $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m \in \mathbb{R}^n$ m *vecteurs non-nuls deux a deux perpendiculaires alors* $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m)$ *est libre et en particulier* $m \leqslant n$. *Si* $m = n$ *ces vecteurs forment une base.*

Définition 3.10. *Une telle base est dite orthogonale. Si de plus les vecteurs sont tous de longueur* 1 *(unitaires) on dit que la base est orthonormee.*

Preuve:

2.2.1. *Le procede de Gramm-Schmidt.*

PROPOSITION 3.10. *Soit* $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ *une base de* $\mathbb{R}^n$*, il existe une base orthonormee* $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ *telle que*

$$\mathbb{R}\mathbf{e}_1 = \mathbb{R}\vec{u}_1,\ \mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \mathbb{R}\mathbf{e}_2 = \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2, \cdots, \mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbb{R}\mathbf{e}_n = \mathbb{R}\vec{u}_1 + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_n = \mathbb{R}^n.$$

Définition 3.11. *Une application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isometrie si elle preserve la distance euclidienne:*

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^n,\ d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q).$$

– *On note*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \textit{ telles que } \forall P, Q \in \mathbb{R}^n,\ d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)\}$$

l'ensemble des isometries.

– *On note egalement*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n,\ \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0})\},$$

le sous-ensemble des isometries qui fixent le vecteur nul $\mathbf{0}$*.*

Théorème 3.3. *Une isometrie est une transformation affine (une application affine bijective). Ainsi les ensembles* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, $T(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *sont des sous-groupes du groupe des transformations affines* $A\,\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$*. Le groupe* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *est un sous-groupe du groupe* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ *des applications lineaires inversibles de* $\mathbb{R}^n$*. Le sous-groupe* $T(\mathbb{R}^n)$ *est distingue dans* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *est engendre par ses deux sous-groupes,*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = T(\mathbb{R}^n) \circ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}.$$

Toute isometrie φ *se decompose de maniere unique sous la forme*

$$\varphi = t \circ \varphi_0,\ t = t_{\varphi(\mathbf{0})} \in T(\mathbb{R}^n),\ \varphi_0 = t_{-\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$$

ou φ_0 *est la partie lineaire de* φ*.*

Théorème 3.4. *Les isometries fixant l'origine* $\mathbf{0}$ *sont des applications lineaires sur* $\mathbb{R}^n$*: si* $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *on a pour tout* $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{v} = (x'_1, \cdots, x'_n)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

Ce sont des applications bijectives: $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.11. *Soit* $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$, *alors* φ *preserve la longueur des vecteurs ainsi que leur produit scalaire:*

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n,\ \ \|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|,\ \ \langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Corollaire 3.5. *L'application*

$$\mathrm{lin} : \cdot_0 : \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) & \mapsto & \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} \\ \varphi & \mapsto & \varphi_0 \end{array}$$

qui a une isometrie associe sa partie lineaire est un morphisme de groupes dont le noyau est le groupe (distingue) des translations $T(\mathbb{R}^n)$

Théorème 3.5. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application lineaire. Alors φ est une isometrie ssi l'un des conditions suivantes est satisfaite:*

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
(2) $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$.
(3) *φ est inversible et* $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^{-1}(\vec{v}) \rangle$.
(4) *φ transforme la base canonique $(\mathbf{e}_i^0)_{i \leqslant n}$ en une base orthonormee $(\varphi(\mathbf{e}_i^0))_{i \leqslant n}$.*
(5) *φ transforme toute base orthonormee $(\mathbf{e}_i)_{i \leqslant n}$ en une base orthonormee $(\varphi(\mathbf{e}_i))_{i \leqslant n}$.*