EPFL
Geometrie, MATH-125

Printemps 2020

Série 7

---

1 Reprise des exercices 6 et 7 de la Serie 5

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1\}$$

est engendre par les deux matrices

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, n = n(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c'est a dire que tout matrice $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ peut s'ecrire comme un produit de matrices formees de puissances de n et de puissances de w.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
2. Verifier que ces matrices appartiennent a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, Calculer w^k et n^k.
3. Soit une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer qu'en multipliant γ, a gauche, par une puissance convenable de n on peut obtenir une matrice $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que
   — ou bien $c = 0$,
   — ou bien $|a'| < |c|$.
4. Dans le premier cas, montrer que γ est un produit de puissances de w et de n.
5. Dans le second cas, montrer que $w.\gamma' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ verifie $|c''| < |c|$.
6. Conclure

Exercice 7. On considere le sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agissant sur le demi-plan de Poincare $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C},\ y > 0\}$ par transformations de Moebius

$$\gamma.z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(on rappelle que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}$ avec une seule orbite.) Le but de cet exercice est de trouver un domaine fondamental pour le quotient (ie. l'espace des orbites) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. Pour cela on utilisera les generateurs n et w de l'exercice precedent.

1. Soit $z \in \mathbb{H}$ et $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, montrer la formule
$$\operatorname{Im} \gamma.z = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$
2. Etant donne $z \in \mathbb{H}$, calculer $n^k.z$ et montrer que etant donne $z \in \mathbb{H}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\Re(n^k.z) \in [-1/2, 1/2[$.
3. Montrer que la transformation $z \mapsto w.z$ est une bijection entre le demi-disque $\{z \in \mathbb{H},\ |z| < 1\}$ et l'espace $\{z \in \mathbb{H},\ |z| > 1\} \subset \mathbb{H}$.
4. Que dire de l'action de w sur le demi-cercle $\{z \in \mathbb{H},\ |z| = 1\} \subset \mathbb{H}$?
5. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$ il existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma.z$ est contenu dans le sous-ensemble (voir le dessin)
$$\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \{z \in \mathbb{H}, \Re z \in [-1/2, 1/2[,\ |z| > 1\} \cup \{\Re z \in [-1/2, 0],\ |z| = 1\}.$$
6. Soit $z \in \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$, montrer que pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a
$$\operatorname{Im}(\gamma.z) \leqslant \operatorname{Im} z$$
et examiner les cas d'egalite (il faudra bien sur utiliser le fin que a, b, c, d sont entiers avec $ad - bc = 1$).
7. Montrer que si z et $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sont tels que
$$z \text{ et } \gamma.z \text{ sont tous deux contenus dans } \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$
alors $z = \gamma.z$ et ou bien $\gamma = \pm\mathrm{Id}$ ou bien $z = i$ ou bien $z = \omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8. Montrer que $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ est un domaine fondamental pour l'action $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \circlearrowright \mathbb{H}$.
9. Dans les deux derniers cas de la question 7, quelles sont les valeurs possibles pour γ ?

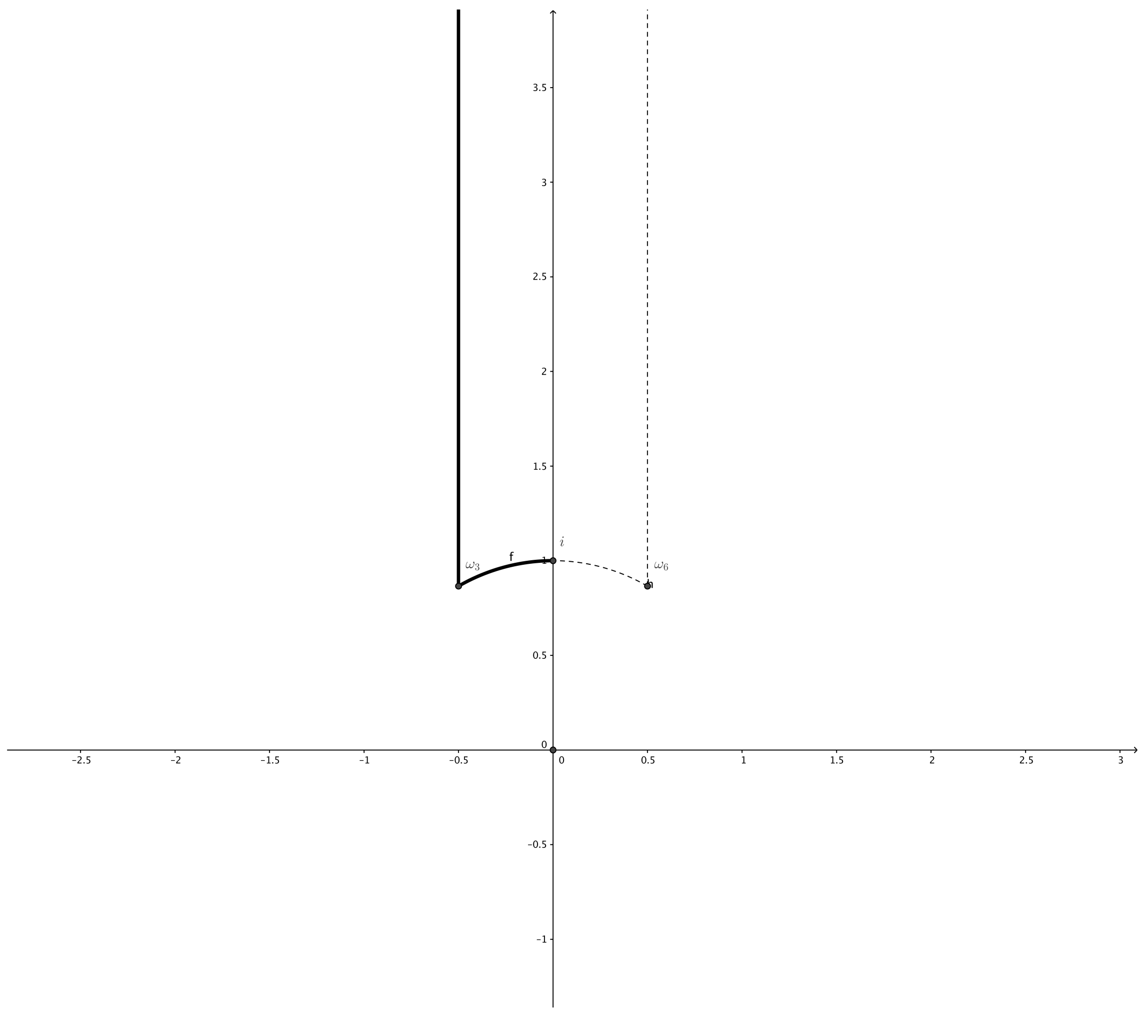

FIGURE 1 – Le domaine fondamental $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$

2 Espaces affines

Dans toute la feuille les espaces affines sont supposes de dimension finie.

Exercice 1. On dit que deux paires de points d'un espace affine X, (P,Q), (R,S) sont equipolents si

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}.$$

Montrer qu'alors

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}.$$

(On dit alors que le quadruple $[PQRS]$ forme un parallelogramme.)

Exercice 2. Soient X un espace affine de dimension d et

$$P_0, \cdots, P_d \in X$$

$d+1$ points en position generale (tels que $(P_0\vec{P}_1, \cdots, P_0\vec{P}_d)$ forment une base de V).

1. Montrer que pour tout point $P \in X$ il existe un unique $d+1$-uplet

   $$(\lambda_0, \cdots, \lambda_d) \in k^{d+1}$$

   tel que

   $$\lambda_0 + \cdots + \lambda_d = 1$$

   et tel que

   $$P = Bar(P_0, \cdots, P_d; \lambda_0, \cdots, \lambda_d).$$

   Le $d+1$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_d)$ forme les coordonnees barycentrique de P dans la base affine $(P_0, \cdots, P_d)$.
2. Reciproquement soit $n \geqslant 0$ et

   $$P_0, \cdots, P_n \in X$$

   tels que pour tout point $P \in X$ il existe un unique $n+1$-uplet

   $$(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in k^{n+1}$$

   tel que

   $$\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1$$

   et tel que

   $$P = Bar(P_0, \cdots, P_n; \lambda_0, \cdots, \lambda_n).$$

   Montrer qu'alors $n = d$ et que $P_0, \cdots, P_d$ sont en position generale.

3. Montrer que le fait d'etre en position generale est independant de l'ordre dans lequel on ecrit les points : pour tout permutation $\sigma : \{0, \cdots, d\} \to \{0, \cdots, d\}$, le $d+1$-uplet $(P_{\sigma(0)}, \cdots, P_{\sigma(d)})$ est en position generale.

Exercice 3. On defini un sous-espace affine de la maniere suivante :

Définition 1. *Un sous-espace affine $Y \subset X$ est un sous-ensemble de X obtenu comme l'ensemble de tous les barycentres possibles de $n+1$ points de X $P_0, \cdots, P_n \in X$ pour $n \geqslant 0$ un entier :*

$$Y = \{Bar(P_0, \cdots, P_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_n),\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in k,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}.$$

On dira alors que Y est le sous-espace affine engendre par $P_0, \cdots, P_n$ ou encore passant par $P_0, \cdots, P_n$.

1. Montrer que cette definition est equivalente a la definition initiale.

Familles libres et generatrices

Soit X un espace affine de direction V.

Soient $\{P_0, \cdots, P_n\} \subset X$ des points de X.

— Si $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est tel que X est l'ensemble des barycentres (algebriques) des points $\{P_0, \cdots, P_n\}$:

$$X = \{Bar(P_0, \cdots, P_n; \lambda_0, \cdots, \lambda_n),\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\},$$

on dit que $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est une famille generatrice de l'espace affine X.

— Si $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est tel que pour tout $P \in X$ qui est un barycentre de ces points,

$$P = Bar(P_0, \cdots, P_n; \lambda_0, \cdots, \lambda_n)$$

le $n+1$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ est unique, on dit que $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est libre.

— Une base affine est donc une famille libre et generatrice.

Exercice 4. Montrer que

1. $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est generatrice $\Longleftrightarrow$ $\{\vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_n}\}$ est generatrice de V. Et qu'alors $n \geqslant \dim X$.

2. $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est libre $\Longleftrightarrow$ $\{\vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_n}\}$ est libre dans V. Et qu'alors $n \leqslant \dim X$.
3. Montrer que de toute famille generatrice d'un espace affine on peut extraire une base affine.
4. Dans $\mathbb{R}^3$ (vu comme espace affine) extraire une base affine de la famille

$$P_0 = (1,1,1), P_1 = (1,1,2),\ P_2 = (1,2,1),\ P_3 = (2,4,3),\ P_4 = (2,2,4).$$

Cela montrera que cette famille est generatrice.

Applications affines

Exercice 5. Soit $\varphi : X \to Y$ une application affine.

1. Montrer que $\varphi(X)$ est un sous-espace affine de Y et en donner une famille generatrice ; donner sa direction en fonction de φ_0.
2. Montrer que si $y \in \varphi(X)$ alors

$$\varphi^{-1}(\{y\}) = \{x \in X,\ \varphi(x) = y\}$$

est un sous-espace affine et donner sa direction en fonction de φ_0.

3. Montrer que pour tout $y \in \varphi(X)$, on a

$$\dim X = \dim \varphi^{-1}(\{y\}) + \dim \varphi(X).$$

4. Montrer que φ est surjective ssi φ transforme au moins une famille generatrice en une famille generatrice (et qu'alors elle transforme toute familles generatrice en une famille generatrice).
5. Montrer que φ est injective ssi φ transforme toute famille libre en une famille libre.
6. On suppose $\dim X = \dim Y$. Montrer que φ est bijective ssi l'une ou l'autre des propriete suivante est vraie :
   - φ est injective.
   - φ_0 est injective.
   - φ est surjective.
   - φ_0 est surjective.

Exercice (question preliminaire). Soit X, Y des espaces affines de direction V et W respectivement.

— Montrer que si $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n)$ est une base de V et que $(\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_n)$ est un ensemble quelconque de vecteurs de W, il existe une unique application lineaire $\varphi_0 : V \to W$ telle que

$$\varphi_0(\vec{v}_i) = \vec{w}_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

— Montrer que se donner une application affine $\varphi : X \to Y$ est equivalent a se donner :
  — Un point $P_0 \in X$.
  — Un point $Q_0 \in Y$
  — Une application lineaire $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$.

  Plus precisement etant donne P_0, Q_0 et φ_0 comme ci-dessus il existe une unique application affine $\varphi : X \mapsto Y$ telle que

$$\varphi(P_0) = Q_0$$

  et la partie lineaire de φ est φ_0.

Exercice 6. Soit φ l'application affine qui envoie

$$P_0 = (1,1,1), P_1 = (1,1,2),\ P_2 = (1,2,1),\ P_3 = (2,2,4)$$

sur

$$Q_0 = (1,2,3), Q_1 = (1,3,3),\ Q_2 = (2,3,6),\ Q_3 = (1,2,4).$$

1. Pourquoi φ existe-elle ? Pourquoi est elle unique ?
2. Decomposer φ sous forme translation/partie lineaire. Calculer son image et $\varphi^{-1}((3,2,1))$. Si φ est inversible calculer son inverse.
3. Meme question pour l'application affine qui envoie les meme quatre points sur

$$Q_0 = (1,2,3), Q_1 = (1,3,3),\ Q_2 = (1,7/3,10/3),\ Q_3 = (1,2,4).$$

4. Existe-t-il une application affine qui envoie

$$P_0' = (1,1,1), P_1' = (1,1,2),\ P_2' = (3/2,3/2,3),\ P_3' = (2,2,4)$$

   sur

$$Q_0' = (1,2,3), Q_1' = (1,3,3),\ Q_2' = (1,5/2,7/2),\ Q_3' = (1,2,4)\ ?$$

   Cette application est elle unique ?

Exercice 7. Soit X un espace affine de direction V. Soit $\mathrm{AGL}(X)$ le groupe des applications affines inversibles, $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des applications lineaires, $T(V) = \{t_{\vec{v}} : P \to P + \vec{v},\ \vec{v} \in V\} \subset \mathrm{AGL}(X)$ le sous-groupe des translations et

$$\mathrm{lin} : \begin{array}{ccc} \mathrm{AGL}(X) & \mapsto & \mathrm{GL}(V) \\ \varphi & \mapsto & \varphi_0 \end{array}$$

le morphisme "partie lineaire" dont on rappelle que le noyau est $\ker(\mathrm{lin}) = T(V)$.

1. Montrer que lin est surjectif.
2. Soit $P \in X$ et soit

$$\mathrm{AGL}(X)_P = \{\varphi \in \mathrm{AGL}(X),\ \varphi(P) = P\}$$

le stabilisateur dans P dans $\mathrm{AGL}(X)$; c'est donc un sous-groupe de $\mathrm{AGL}(X)$. Montrer que la restriction de l'application partie lineaire

$$\mathrm{lin} : \mathrm{AGL}(X)_P \to \mathrm{GL}(V)$$

est un isomorphisme de groupes (la surjectivite demande donc, etant donne $\varphi_0 \in \mathrm{GL}(V)$ de construire une application affine φ fixant P et de partie lineaire φ_0). Montrer que ce sous-groupe n'est pas normal (sauf si $\dim X = 0$).
3. On suppose que $X = V$. Montrer que $\mathrm{GL}(V)$ est un sous-groupe de $\mathrm{AGL}(V)$. Quel est ce sous-groupe par rapport a la question precedente.

Exercice 8. Soit X un espace affine et $\mathrm{A}\mathcal{B}(X)$ l'ensemble des bases affines de X.
1. Montrer que tout element de $\mathrm{AGL}(V)$ transforme une base affine en une autre base affine.
2. Montrer que cela induit une action de $\mathrm{AGL}(V)$ sur $\mathrm{A}\mathcal{B}(X)$ et que $\mathrm{A}\mathcal{B}(X)$ est un espace principal homogene.

3 Espaces euclidiens

– On muni $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i$$

pour $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{v} = (x'_1, \cdots, x'_n)$.

– Dans la suite on ecrira "BO" pour "base orthonormee". On notera une BO de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ sera notee

$$\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_{0,1}, \cdots, \mathbf{e}_{0,n}) :$$

$$\mathbf{e}_{0,1} = (1, 0, \cdots, 0), \cdots$$

– Dans cette feuille toutes les isometries seront par defaut des isometries fixant l'origine.

Exercice 9. (Autour de Gramm-Schmidt) Dans $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver un BO dont un vecteur engendre le sous-espace W defini par les equations
$$W : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$
2. Trouver une BO dont deux vecteurs forment une base du sous-espace
$$V = \langle (1, 2, 0), (3, 1, 2) \rangle.$$
3. Trouver une BO dont deux vecteurs forment une base du sous-espace
$$V = \{(x, y, z),\ x + y + z = 0\}.$$
que remarquez vous pour le troisieme vecteur ?

Exercice 10. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace ; on note
$$V^\perp = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \vec{v} \in V,\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0\}$$
l'ensemble des vecteur de $\mathbb{R}^3$ perpendiculaires a tous les vecteur de V.

1. Montrer que $V^\perp$ est un SEV. On veut montrer qu'on a une decomposition en somme directe
$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp.$$
En particulier $\dim V + \dim V^\perp = n$.
2. Montrer que $V \cap V^\perp = \{0\}$.
3. Supposons que $\mathbb{R}^n \neq V + V^\perp$. Montrer en utilisant Gramm-Schimdt qu'il existe $w \in \mathbb{R}^n$ qui est perpendiculaire a V et a $V^\perp$ et en deduire une contradiction.
4. Montrer qu'on peut trouver une BO de $\mathbb{R}^n$ dont une partie des vecteurs forme une BO de V et la partie complementaire une BO de $V^\perp$.
5. soit φ une isometrie lineaire qui laisse V stable ($\varphi(V) \subset V$) ; montrer que $\varphi(V) = V$ et que $\varphi(V^\perp) = V^\perp$.

Exercice 11. Soit $\mathbf{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non-nul ; on considere l'application
$$\varphi_{\vec{v}} : \vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{u} - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}.$$

1. Montrer que $\varphi_{\vec{v}}$ est une isometrie.
2. On dit que $\varphi_{\vec{v}}$ est la symetrie orthogonale par rapport a l'hyperplan $\vec{v}^\perp$. Pourquoi ?