Math 125 - Chap 3

Espaces Affines & Euclidiens

20 avril 2020

Applications Affines

1.3. Morphismes d'espaces affines.

DÉFINITION 3.2. *Soient X et Y deux espaces affines (de directions V et W). Une application $\varphi : X \to Y$ est dite affine si elle preserve les barycentres: pour tout $(P_1, \cdots, P_n) \subset X^n$ et tout $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in k^n$ verifiant*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

on a

$$\varphi(Bar(P_1, \cdots, P_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = Bar(\varphi(P_1), \cdots, \varphi(P_n); \lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

On en deduit immediatement la

PROPOSITION 3.6. *La composee de deux applications affines est affine; la reciproque d'une application affine bijective est affine.*

DÉFINITION 3.6. *On a les definitions suivantes*

–Un endomorphisme affine est une application affine d'un espace affine sur lui-meme.

– Un isomorphisme d'espaces affines est une application affine qui est bijective et dont l'application reciproque est encore affine.

– Un automorphisme affine est un isomorphisme affine d'un espace affine sur lui-meme. On l'appelle egalement transformation affine.

On note ses ensembles respectivement par

$$-\ \operatorname{Hom}_{\text{aff}}(X,Y) = A\operatorname{Hom}(X,Y),\ \operatorname{End}_{\text{aff}}(X) = A\operatorname{End}(X),\ \operatorname{Aut}_{\text{aff}}(X) = A\operatorname{GL}(X).$$

En vertu de la proposition precedente, le dernier ensemble est un groupe appelle "groupe des automorphismes affines" ou "groupe lineaire affine".

- $\varphi : X \xrightarrow[\text{affine}]{} X \rightsquigarrow$ Endomorphisme affine
- Isomorphisme affine
- Automorphisme $\varphi : X \xrightarrow{\sim} X$

Partie Lineaire d'une application affine

Théorème 3.1. *Soit X, Y deux espace affines (de directions V et W). Une application $\varphi : X \to Y$ est affine si et seulement si pour $P_0 \in X$ l'application definie par*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0 : V & \mapsto & W \\ \vec{v} & \mapsto & \varphi_0(\vec{v}) = \varphi(P_0 + \vec{v}) - \varphi(P_0) \end{array}$$

est lineaire. Dans ce dernier cas l'application φ_0 ne depend pas du choix du point P_0. On l'appelle la partie lineaire de φ. On a la formule suivante:

$$\left(\!\left(\forall P \in X, \vec{v} \in V,\ \varphi(P + \vec{v}) = \varphi(P) + \varphi_0(\vec{v}). \right)\!\right)$$

$$\forall \vec{v} \in V \quad \varphi_0(\vec{v}) := \varphi(P_0 + \vec{v}) - \varphi(P_0)$$

$$= \overrightarrow{\varphi(P_0)\varphi(P_0 + \vec{v})} \in W$$

Exemple : $X = V$ = espace vectoriel

COROLLAIRE 3.1. *Soit V un k-espace vectoriel et φ un endomorphisme affine de V sur V alors φ de decompose de maniere unique sous la forme*

$$\varphi = t_{\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi_0$$

ou φ_0 est la partie lineaire.

$$\varphi : V \longrightarrow V \rightsquigarrow \varphi_0 : V \longrightarrow V$$

et on a $P \in V$

$$\varphi(P) = \overrightarrow{\varphi(0)} + \varphi_0(P)$$

$0 = 0_V$: on ecrit la formule generale pour φ_0 en prenant $P_0 = \vec{0}$ et $P = \overrightarrow{OP}$

Proposition 3.7 (Composition d'applications affines). *Soit X, Y, Z des espaces affines et $\varphi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ des applications affines alors $\psi \circ \varphi : X \to Z$ est affine et sa partie lineaire est*

$$(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0.$$

– *Supposons que $\varphi : X \to Y$ est bijective alors sa reciproque φ^{-1} est affine et $(\varphi^{-1})_0 = \varphi_0^{-1}$.*

On deduit cette proposition le corollaire suivant concernant les isomorphismes affines.

Corollaire 3.2. *L'application "partie lineaire"* $\mathrm{lin} : \varphi \in A\,\mathrm{GL}(X) \mapsto \varphi_0 \in \mathrm{GL}(V)$ *est un morphisme de groupe de noyau le groupe des translations* $T(V)$. *En particulier* $T(V)$ *est distingue dans* $A\,\mathrm{GL}(X)$.

Preuve : On applique la prop precedente à $X = Y = Z$

$$X \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi} X \rightsquigarrow V \xrightarrow{\varphi_0} V \xrightarrow{\psi_0} V$$

$$(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0$$

$$X \xrightarrow{\varphi} X \overset{\mathrm{Lin}}{\rightsquigarrow} V \xrightarrow{\varphi_0} V$$

$$X \xrightarrow{\varphi^{-1}} X \overset{\mathrm{Lin}}{\rightsquigarrow} V \xrightarrow{\varphi_0^{-1}} V \qquad (\varphi^{-1})_0 = (\varphi_0)^{-1}$$

– Soit $\varphi \in AGL(X)$ tq $\vec{\varphi_0} = Id_V$

$\forall P \in X \quad \varphi(P) = \varphi(P_0) + \vec{\varphi_0}(\overrightarrow{P_0P})$

$= \varphi(P_0) + \overrightarrow{P_0P}$

$\rightsquigarrow \varphi$ est une translation

$\overrightarrow{\varphi(P_0)\varphi(P)} = \overrightarrow{P_0P}$

$\varphi(P) = \varphi(P_0) + P - P_0 = P + \overrightarrow{P_0\varphi(P_0)}$

$\varphi = t_{\overrightarrow{P_0\varphi(P_0)}}$. $\square$

Corollaire 3.3. *Soit $\varphi : X \to Y$ une application affine.*

- *Son image $Y' = \operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace affine de Y sous l'action de $W' = \operatorname{Im}\varphi_0$.*
- *Pour tout $y \in Y$, la preimage*

$$\varphi^{-1}(\{y\}) = \{x \in X,\ \varphi(x) = y\}$$

est soit l'ensemble vide (si $y \notin Y$) ou un sous-espace affine de X sous l'action de $\ker(\varphi_0)$.

$y \notin \operatorname{Im}\varphi$

- *On a la relation*

$$\dim X = \dim V = \dim(\ker\varphi_0) + \dim(\operatorname{Im}\varphi). = \dim\ker\varphi_0 + \dim \operatorname{Im}\varphi_0$$

- *Plus generalement, l'image et la preimage d'un sous-espace affine de X (resp. Y) est un sous espace affine (eventuellement l'ensemble vide pour la preimage).*

Preuve : $\forall P_0$

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(P) \quad P \in X\} = \{\varphi(P_0 + \vec{v}) \quad \vec{v} \in V\}$$
$$= \{\varphi(P_0) + \varphi_0(\vec{v}) \quad \vec{v} \in V\} = \varphi(P_0) + \varphi_0(V)$$

pour la préimage : soit $Q_0 \in Y$

- si $Q_0 \notin \operatorname{Im} \varphi$ $\quad \varphi^{-1}(\{Q_0\}) = \emptyset$.

- si $Q_0 \in \operatorname{Im} \varphi$ $\quad Q_0 = \varphi(P_0)$

$\forall P \in X$ si $\varphi(P) = Q_0 = \varphi(P_0)$

on a : $\varphi(P) = \varphi(P_0) + \varphi_0(\overrightarrow{P_0P}) = \varphi(P_0)$

$\Longleftrightarrow \varphi_0(\overrightarrow{P_0P}) = \vec{0}_W \quad \overrightarrow{P_0P} \in \ker \varphi_0$

$\rightsquigarrow \quad P = P_0 + \overrightarrow{P_0P} \qquad \overrightarrow{P_0P} \in \ker \varphi_0$

$$\varphi^{-1}(\{Q_0\}) \subseteq P_0 + \ker \varphi_0$$
$$\supseteq$$

- la partie sur les dims resulte des 2 premieres, de la def de la dim d'un espace affine et du thm noyau-image pour les EVs. $\square$

Corollaire 3.4. *Une application affine $\varphi : X \to Y$ est injective si et seulement si φ_0 l'est (c.a.d $\ker \varphi_0 = \{0_V\}$).*

–Une application affine $\varphi : X \to Y$ est surjective si et seulement si φ_0 l'est.

–Une application affine $\varphi : X \to Y$ est surjective si et seulement si $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim Y$

–Une application affine $\varphi : X \to Y$ est un isomorphisme affine si et seulement si φ_0 est bijective.

Preuve : Si φ est injective $\Leftrightarrow$ $\forall Q \in \operatorname{Im}\varphi$ $\varphi^{-1}(\{Q\})$ est reduit a un pt = espace affine de dim 0

$\varphi^{-1}(\{Q\}) = P_0 + \ker \varphi_0 \Leftrightarrow \ker \varphi_0 = \{0_V\}$

- φ est surjective ssi

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \underset{\smile}{Y} = \varphi(P_0) + \mathrm{Im}\,\varphi_0$$

$$\iff \mathrm{Im}\,\varphi_0 = W.$$

$\square$

Espace Euclidien $\mathbb{R}^n$ $(n=3)$

- $\mathbb{R}^n$ vu comme $\mathbb{R}$-ev
  et vu comme $\mathbb{R}$-espace affine (de direction $\mathbb{R}^n$)
- Equipé de la distance euclidienne

$P=(x_1,\dots,x_n)$ $Q=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

$$d(P,Q)=\left((y_1-x_1)^2+\dots+(y_n-x_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

en terme de structure affine

la distance euclidienne est définie en terme de la longueur euclidienne

$$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\vec{u}\| := \left(u_1^2 + \dots + u_n^2\right)^{1/2}$$ et

$$d(P,Q) = \|\vec{PQ}\|$$ s'applique à X un espace affine de direction $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.7. *La longueur euclidienne d'un vecteur* $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$ *est donnee par*

$$\|\vec{u}\| = \|(x_1, \cdots, x_n)\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

La distance euclidienne dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$ *est la fonction*

$$d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

donnee pour $P = (x_1, \cdots, x_n)$ *et* $Q = (x_1', \cdots, x_n')$ *par*

$$d(P, Q) = ((x_1 - x_1')^2 + \cdots + (x_n - x_n')^2)^{1/2} = \|\vec{PQ}\|.$$

Théorème 3.2. *La fonction longueur (resp. distance) a les proprietes suivantes*

– *Separation des points: pour tout* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \mathbf{0},\ \ d(P,Q) = 0 \iff P = Q.$$

– *Inegalite du triangle:*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|,\ \ d(P,R) \leqslant d(P,Q) + d(Q,R)$$

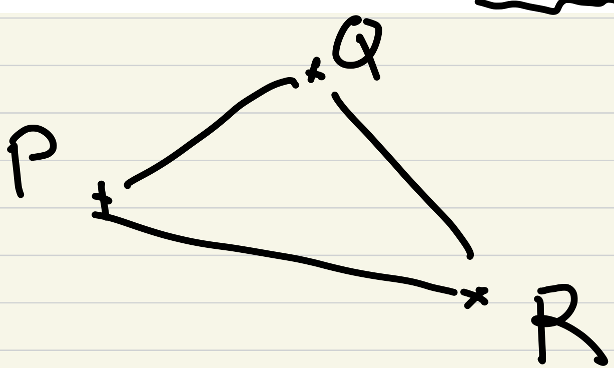
avec egalite si et seulement si P, Q, R *sont alignes (cad* $\vec{PQ}$ *et* $\vec{PR}$ *sont proportionels) et que* Q *est "entre"* P *et* R *(ie contenu dans le segment*

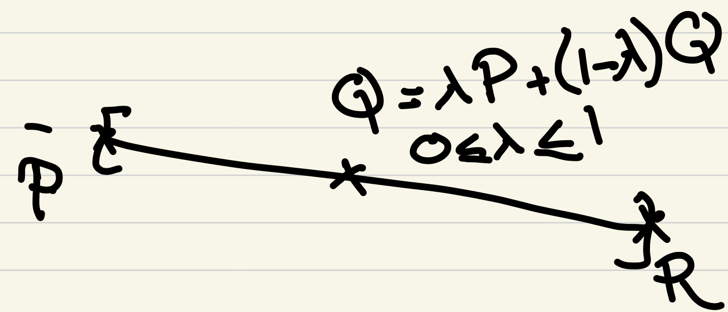
$$[P,R] = \{Q = \lambda.P + (1-\lambda).R,\ \ \lambda \in [0,1]\}).$$

– *Homogeneite:*

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|,\ \ d(\lambda.P, \lambda.Q) = |\lambda| d(P,Q)$$

avec $\lambda.P = (\lambda.x_+, \cdots, \lambda.x_n)$ *l'image de* P *par l'homothetie de centre* $\mathbf{0}$ *et de rapport* λ*:* $\lambda.(x_1, \cdots, x_n) = \cancel{(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}$ $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$





Produit Scalaire Euclidien

$$\vec{U} = (U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\vec{V} = (V_1, \ldots, V_n)$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \langle \vec{U}, \vec{V} \rangle = U_1 . V_1 + \ldots + U_n . V_n \in \mathbb{R}$$

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} .$$

$$\vec{U} . \vec{U} = \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle = \| \vec{U} \|^2 .$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := x_1 x_1' + \cdots + x_n x_n'.$$

On a donc

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2. \tag{2.1}$$

Rappelons que le produit scalaire est

- symetrique:
$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle,$$
- bilineaire:
$$\langle \lambda\vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$
$$\langle \vec{w}, \lambda\vec{u} + \vec{v} \rangle = \lambda\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle.$$
- Defini-Positif:
$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geqslant 0 \text{ avec egalite ssi } \vec{u} = \mathbf{0}.$$

On deduit de (2.1), de la symetrie et de la bilinearite, les relations dites de *polarisation*

$$\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \pm 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \tag{2.2}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\|) \tag{2.3}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \tag{2.4}$$

Proposition 3.8 (Inegalite de Cauchy-Schwarz). *On a*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leqslant \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

avec egalite si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont proportionels:* $\vec{u} = \mathbf{0}$ *et alors* $\vec{u} = 0.\vec{v}$ *ou bien*

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

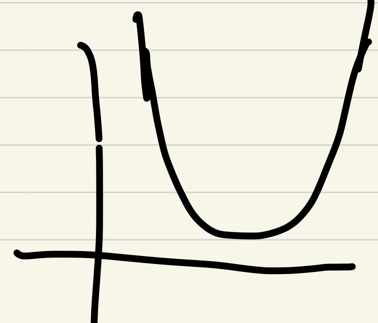
Preuve : On considère la fonction

$$\lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \|\lambda \vec{u} + \vec{v}\|^2$$ (on suppose $\vec{v} \neq \vec{0}$)

c'est un polynôme en λ de d° 2

à valeurs ≥ 0

et le discriminant



$$\|\lambda\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \langle \lambda\vec{u}+\vec{v}, \lambda\vec{u}+\vec{v}\rangle$$

$$= \lambda^2 \underset{\|\vec{u}\|^2}{\underset{\parallel}{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}} \neq 0 + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\lambda + \underset{\|\vec{v}\|^2}{\underset{\parallel}{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}}$$

$$\Delta = 4\langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \underset{\underset{\text{CS}}{\uparrow}}{\leq} 0$$

$$\square$$

Orthogonalité

Définition 3.9. *Deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, sont dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou perpendiculaires*

Proposition 3.9. *Soient $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m \in \mathbb{R}^n$ m vecteurs non-nuls deux a deux perpendiculaires alors $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m)$ est libre et en particulier $m \leqslant n$. Si $m = n$ ces vecteurs forment une base.*

Preuve: $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

$$\boxed{\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i}$$

$$\forall i \quad \langle \vec{0}, e_i \rangle = 0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{\substack{=0 \text{ sauf} \\ \text{si } i=j}} = \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{\substack{\neq 0 \\ \text{car } e_i \neq 0}}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \square$$

Définition 3.10. *Une telle famille* $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m)$ *de vecteurs perpendiculaires est appellee famille orthogonale (ou famille de vecteurs orthogonaux).*

- *Si de plus les vecteurs sont tous de longueur* 1 *(unitaires) on dit que la famille est orthonormee.*
- *Si* $m = n$ *cette famille est une base et est appellee base orthogonale (et est dite orthonormee si la famille est orthonormee)*

Ex : la base canonique $n=3$

$e_1^0 = (1,0,0) \quad e_2^0 = (0,1,0) \quad e_3^0 = (0,0,1)$

PROPOSITION 3.10. *Soit* $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ *une base orthogonale de* $\mathbb{R}^n$. *Pour tout vecteur* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *la decomposition en combinaison lineaire de cette base s'ecrit*

$$\vec{x} = \lambda_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n,$$

avec

$$\lambda_i = \frac{\langle \vec{x}, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle}, \ i = 1, \cdots, n. \tag{2.5}$$

$$\lambda_i = \frac{\langle \vec{x}, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} (= 1)$$

En particulier si la base est orthonormee (ie. $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1, \ i = 1, \cdots, n$*) on a la formule simplifiee*

$$\lambda_i = \langle \vec{x}, \mathbf{e}_i \rangle, \ i = 1, \cdots, n. \tag{2.6}$$

Preuve :

$$\vec{x} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

$$\langle \vec{x}, e_i \rangle = \lambda_1 \langle e_1, e_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_n, e_i \rangle$$

$$= \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle \quad \text{et } \langle e_i, e_i \rangle \neq 0$$

2.2.1. *Le procede de Gramm-Schmidt.*

PROPOSITION 3.11. *Soit $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, il existe une base orthonormee $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ telle que*

Span(v_1, v_2)

$$\mathbb{R}\mathbf{e}_1 = \mathbb{R}\vec{u}_1,\ \mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \mathbb{R}\mathbf{e}_2 = \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2, \cdots, \mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbb{R}\mathbf{e}_n = \mathbb{R}\vec{u}_1 + \cdots + \mathbb{R}\vec{u}_n = \mathbb{R}^n.$$

Preuve: Cf. le cours Algebre Lineaire Avancee. □

COROLLAIRE 3.5 (Completion en une base orthonormee). *Soit $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m)$ une famille orthonormee de $\mathbb{R}^n$ alors il existe des vecteurs $\mathbf{e}_{m+1}, \cdots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ soit base orthonormee de $\mathbb{R}^n$.*

$m < n$

Isometries

DÉFINITION 3.11. *Une application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isometrie si elle preserve la distance euclidienne:*

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^n,\ d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q).$$

– *On note*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \text{ telles que } \forall P, Q \in \mathbb{R}^n,\ d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)\}.$$

l'ensemble des isometries.

– *On note egalement*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0})\},$$

le sous-ensemble des isometries qui fixent le vecteur nul $\mathbf{0}$.

<u>Exemple</u>: translations : $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$t_{\vec{v}} : P \to P + \vec{v}$$

$$d(t_{\vec{v}}(P), t_{\vec{v}}(Q)) = \|\overrightarrow{P+\vec{v}\ \ Q+\vec{v}}\| = \|\underbrace{Q+\vec{v}-(P+\vec{v})}\|$$

$$= \| Q - P \| = \| \overrightarrow{PQ} \| = d(P,Q)$$

$T(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des translations

$\subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$

Théorème 3.3. *Une isometrie est une transformation affine (une application affine bijective). Ainsi les ensembles* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, $T(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *sont des sous-groupes du groupe des transformations affines* $A\,\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. *Le groupe* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *est un sous-groupe du groupe* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ *des applications lineaires inversibles de* $\mathbb{R}^n$. *Le sous-groupe* $T(\mathbb{R}^n)$ *est distingue dans* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *est engendre par ses deux sous-groupes,*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = T(\mathbb{R}^n) \circ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}.$$

Toute isometrie φ *se decompose de maniere unique sous la forme*

$$\varphi = t \circ \varphi_0, \; t = t_{\varphi(\mathbf{0})} \in T(\mathbb{R}^n), \; \varphi_0 = t_{-\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$$

ou φ_0 *est la partie lineaire de* φ.

THÉORÈME 3.4. *Les isometries fixant l'origine* $\mathbf{0}$ *sont des applications lineaires sur* $\mathbb{R}^n$*: si* $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *on a pour tout* $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{v} = (x'_1, \cdots, x'_n)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

Ce sont des applications bijectives: $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Def: L'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$ s'appelle l'ensemble des isometries lineaires.

PROPOSITION 3.11. *Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$, alors φ preserve la longueur des vecteurs ainsi que leur produit scalaire:*

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \ \|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|, \ \langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Preuve : soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{v} = \vec{Ov} = \vec{v} - \vec{O}$

$$\|\varphi(\vec{v})\| = \|\varphi(\vec{v}) - \vec{O}\| \underset{\varphi(\vec{O}) = \vec{O}}{=} \|\varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{O})\|$$

$$= d(\varphi(\vec{O}), \varphi(\vec{v})) \underset{\varphi \text{ isom}}{=} d(\vec{O}, \vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{O}\| = \|\vec{v}\|$$

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \quad \langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w}) \rangle \overset{?}{=} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle .$$

$$\langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w}) \rangle = \frac{1}{2}\Big(\|\varphi(\vec{v})\|^2 + \|\varphi(\vec{w})\|^2 - \|\varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{w})\|^2 \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - d(\varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w}))^2 \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - d(\vec{v}, \vec{w})^2 \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 \Big) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad \square$$

On va mq $\boxed{\varphi(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})}$

Preuve :

$$\|\varphi(\lambda\vec{u}+\vec{v}) - \lambda\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\|^2 \overset{?}{=} 0$$

$$= \langle \varphi(\quad) - \lambda\varphi_u - \varphi_v, \varphi(\quad) - \lambda\varphi_u - \varphi_v \rangle$$

$$= \langle \varphi(\quad), \varphi(\quad) \rangle + \lambda^2 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

$$- 2\lambda \langle \varphi(\quad), \varphi_u \rangle - 2\langle \varphi(\quad), \varphi_v \rangle - 2\cdot\lambda\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$$

$$= \langle (\lambda\vec{v}+\vec{v}), (\;-\;) \rangle + \lambda^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

$$-2\lambda \langle (\quad), \vec{u} \rangle - 2\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - 2 \langle (\quad), \vec{v} \rangle$$

$$= \langle (\lambda\vec{u}+\vec{v}) - \lambda\vec{u} - \vec{v}, (\lambda\vec{u}+\vec{v}) - \lambda\vec{u} - \vec{v} \rangle$$

$$= \langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0$$

$$\square$$