Math 125 – Chap 3

Espace Euclidiens : Isometries de l'espace & Gps finis d'isometrees

11 mai 2020

4.4. Proprietes spectrales des isometries.

PROPOSITION 3.15. *Soit φ une isometrie sur $\mathbb{R}^n$ alors toute valeur propre reelle si elle existe vaut ± 1.*

lineaire

PROPOSITION 3.16. *Supposons n impair et soit φ une isometrie lineaire alors φ possede une valeur propres reelle et un vecteur propre de longueur 1: il existe $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{e}\| = 1$ et $\lambda = \pm 1$ avec*

$$\varphi(\mathbf{e}) = \lambda.\mathbf{e}.$$

De plus si φ est speciale $\det M_\varphi = +1$ alors $+1$ est valeur propre.

4.5. Reduction des isometries.

THÉORÈME 3.9. *Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ une isometrie lineaire et $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace qui est stable par φ:*

$$\varphi(W) \subset W.$$

Soit

$$W^{\perp} = \{\vec{w}' \in \mathbb{R}^n,\ \forall \vec{w} \in W, \langle \vec{w}, \vec{w}' \rangle = 0\}$$

l'orthogonal de W alors $W^{\perp}$ est un SEV stable par φ et on a une decomposition en somme speciale (orthogonale)

$$\mathbb{R}^n = W \oplus W^{\perp}.$$

Soit $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_r, \vec{w}'_1, \cdots, \vec{w}_{r'})$ un base orthonormee formee d'une BO de W et de $W^{\perp}$ alors la matrice de φ dans cette base est une matrice blocs

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} M_{\varphi,\mathcal{B}_W} & 0 \\ 0 & M_{\varphi,\mathcal{B}_{W^{\perp}}} \end{pmatrix}$$

ou

$$M_{\varphi,\mathcal{B}_W} \in \mathrm{O}_r(\mathbb{R}),\ M_{\varphi,\mathcal{B}_{W^{\perp}}} \in \mathrm{O}_{r'}(\mathbb{R})$$

sont des matrices orthogonales. En particulier on a

$$\det(M_{\varphi,\mathcal{B}}) = \det(M_{\varphi,\mathcal{B}_W})\det(M_{\varphi,\mathcal{B}_{W^{\perp}}})$$

THÉORÈME 3.10. *Soit $n \geqslant 1$ un entier impair et $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ une isometrie lineaire; il existe une base orthonormee que l'on peut supposer orientee $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)$ telle que $M_{\varphi,\mathcal{B}}$ est de la forme*

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & M_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \ \textit{avec } M_{n-1} \in \mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R})$$

la matrice d'une isometrie. On a

$$\det(M_{\varphi,\mathcal{B}}) = (\pm 1)\det(M_{n-1}).$$

Si $\det \varphi = +1$ alors ops $\pm 1 = +1$

et $M_{n-1} \in SO_{n-1}(\mathbb{R})$

Deplacements / anti-deplacements

DÉFINITION 3.17. *L'ensemble des isometries*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \varphi_0 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+_{\mathbf{0}}\} = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \det(\varphi_0) = +1\}$$

dont la partie lineaire est une speciale est s'appelle groupe des deplacements affines; son complementaire dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des anti-deplacements affines*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^- = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \varphi_0 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^-_{\mathbf{0}}\} = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \det(\varphi_0) = -1\}.$$

THÉORÈME 3.11. *L'ensemble des deplacements affines* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$ *forme un sous-groupe distingue de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *d'indice 2; l'ensemble des anti-deplacements est la seconde des deux orbites pour l'action de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$ *sur* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *par multiplication: on a pour tout* $s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^-$

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^- = s.\,\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+.s$$

et

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \sqcup \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^- = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \sqcup s.\,\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \sqcup \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+.s$$

$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0 \qquad \vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \qquad \vec{v} \perp \vec{w}$

Théorème 3.11 (Decomposition des isometries affines). *Soit* $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *une isometrie affine de partie lineaire* $\varphi_0 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$. *L'isometrie* φ *se decompose de maniere unique sous la forme*

$$\varphi = t_{\vec{v}} \circ \varphi' \text{ avec } \varphi' = t_{\vec{w}} \circ \varphi_0$$

avec $\vec{v} \in \ker(\varphi_0 - \mathrm{Id})$ *et* $\vec{w} \in \mathrm{Im}(\varphi_0 - \mathrm{Id})$. *On a les proprietes suivantes*

(1) *Les sous espaces* $\ker(\varphi_0 - \mathrm{Id})$ *et* $\mathrm{Im}(\varphi_0 - \mathrm{Id})$ *sont perpendiculaires et en particulier supplementaires.*

(2) φ' *commute avec* $t_{\vec{v}}$:
$$t_{\vec{v}} \circ \varphi' = \varphi' \circ t_{\vec{v}},$$

(3) *L'ensemble des points fixes de* φ' *est non-vide et un espace affine de direction* $\ker(\varphi_0 - \mathrm{Id})$: *plus precisement soit* $\vec{z}$ *tel que*
$$\vec{w} = \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z}$$
alors
$$\mathrm{Fix}(\varphi') = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \varphi'(x) = x\} = -\vec{z} + \ker(\varphi_0 - \mathrm{Id}).$$

(4) *L'isometrie* φ *admet des points fixes si et seulement si* $\vec{v} = \mathbf{0}$ *c'est a dire si et seulement si* $\varphi = \varphi'$.

sous espace propre pour la vp +1 = l'ensemble des pts fixes de φ_0

Le cas $n=3$

Corollaire 3.7. *Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0}}$ une isometrie lineaire; il existe une base orthonormee $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ telle que $M_{\varphi,\mathcal{B}}$ est de la forme*

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \text{ avec } M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

une matrice orthogonale. Si de plus $M_2 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})^-$ est une matrice de symetrie alors (quitte a modifier $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$), on peut supposer que

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si enfin $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+_{\mathbf{0}}$ est speciale, on peut prendre la matrice $M_{\varphi,\mathcal{B}}$ de la forme

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \text{ avec } M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

une matrice de rotation.

Le cas $n=3$: Isometries speciales

- $\varphi = Id_{\mathbb{R}^3}$ $\quad M_{\varphi, B_0} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

- φ est speciale non-triviale

$\exists$ BON B tq

$$M_{\varphi,B} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \end{array}$$

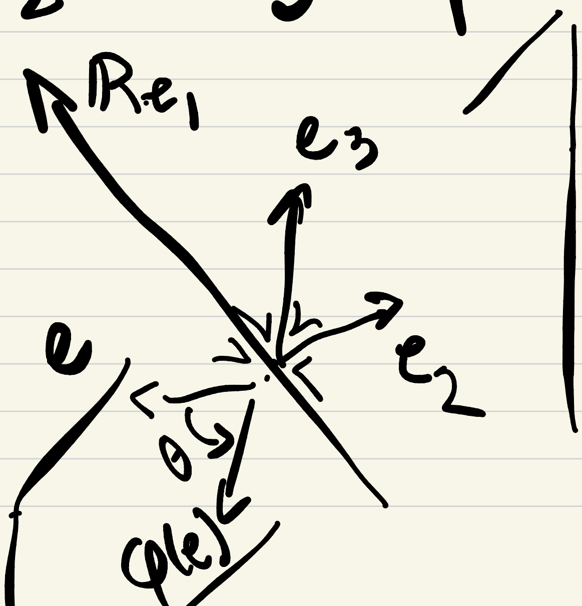
$c^2+s^2=1$

$c+is$ = angle de la rotation de dim 2

e_1 = propre de vp $+1$

$\varphi(e_1) = e_1$ $\quad$ e_1 est un pt fixe pour φ

$\mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$ = plan perpendiculaire à $\mathbb{R}e_1$



$\cos\theta + \sin\theta . i = c + is$

ou φ est la rotation d'axe $\mathbb{R}e_1$ et d'angle $c+is$

Rmq: pour définir l'angle sans ambiguité on supposera que la base (e_1, e_2, e_3) est orientée: le det des coord des vecteurs (e_1, e_2, e_3) vaut $+1$.

Le cas $n=3$: Isometries non-speciales

φ est une isometrie lineaire non-speciale

$$M_{\varphi,B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -1$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symetrie du plan le plan $= (\mathbb{R}e_1)^\perp$ = plan $\perp$ à e_1

il existe un BON (e_2, e_3) tq

la matrice de cette symetrie soit

la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Symetrie ortho / à la dte $\mathbb{R}e_2$

$$M_{\varphi,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\varphi(e_1) = e_1 \quad \varphi(e_2) = e_2$

$\varphi(e_3) = -e_3$

φ est la symetrie orthogonale par rapport au plan $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\vec{v}) = \vec{v} - 2\frac{\langle \vec{v}, e_3 \rangle}{\langle e_3, e_3 \rangle} \cdot e_3$$

$$- M_{\varphi,B} = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = +1$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \text{matrice de rotation d'angle } c+is$$

φ transforme un vecteur proportionel à e_1 en son opposé et dans le plan $(\mathbb{R}e_1)^\perp = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$

φ agit par une rotation d'angle $c+is$

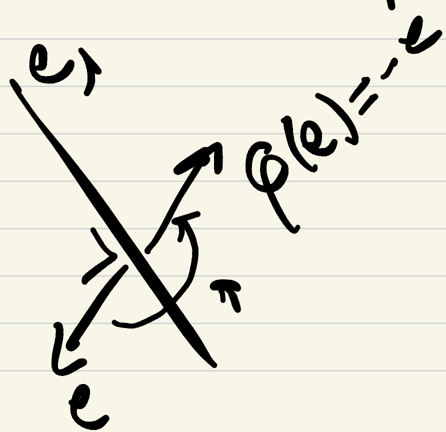
φ s'appelle une antirotation d'angle $c+is$

($c \pm is$ si la base n'est pas forcement orientée)

Rmq : Cas particulier

une rotation d'angle -1 (π mod)

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$ = symétrie orthogonale par rapport à la dte $\mathbb{R}e_1$



- Antirotation d'angle 1

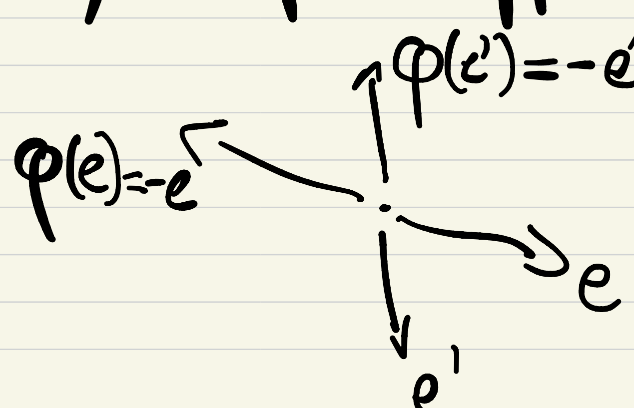
$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \text{symetrie / plan } \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$$

- Anti rot

Antirotation d'angle -1 (π rad)

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = -I_d = \text{Symetrie par rapport à } \vec{O}$$

$\forall e \quad \varphi(e) = -e$



Le cas $n=3$: Isometries affines

$$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0 = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ \varphi_0$$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\ker(\varphi_0 - \mathrm{Id})}_{\text{pts fixes de } \varphi_0} \oplus \underbrace{\mathrm{Im}(\varphi_0 - \mathrm{Id})}_{\text{orthogonal aux pts fixes de } \varphi_0}$$

Deplacements :

- $\varphi_0 = I_d$ $\quad \varphi = t_{\vec{u}} \circ I_d = t_{\vec{u}}$ = translation

- $\vec{u} = \vec{0}$ et $\varphi = I_d$ $\quad Fix(\varphi) = \mathbb{R}^3$

- $\vec{u} \neq \vec{0}$ et φ est une translation non-triviale et n'a pas de pts fixes.

$\ker(\varphi_0 - I) = \ker(0) = \underline{\mathbb{R}^3}$ $\quad \ker(\varphi_0 - I_d)^{\perp} = \{0\}$

$\mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d)$

φ_0 = rotation non triviale

$$\mathrm{Fix}(\varphi_0) = \ker(\varphi_0 - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}e_1$$

2 cas possibles :

1) $\vec{v} - \vec{O}$ $\quad \vec{u} = \vec{w}$ $\quad \mathrm{Fix}(\varphi)$ = une dte affine de direction $\mathbb{R}e_1$

$\vec{u} \perp e_1$

φ = rotation autour de cette dte

$\mathrm{Fix}(\varphi)$ = axe de la rotation.

2) $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\quad \varphi = t_{\lambda e_1} \circ \underbrace{(t_{\vec{w}} \circ \varphi_0)}_{\varphi'}$

$\vec{v} = \lambda e_1 \quad \lambda \neq 0$

$\vec{w} \in e_1^{\perp}$

φ' est une rotation d'axe une dte affine de direction $\mathbb{R}e_1$

φ = composée de cette rotation avec une translation le long de cet axe

Comme $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{v} \not\parallel \mathrm{Fix}(\varphi_0)$

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \emptyset$$

φ est un <u>vissage</u> le long de l'axe de φ' par le vecteur $\lambda e_1 = \vec{v}$

pas de vis du vissage

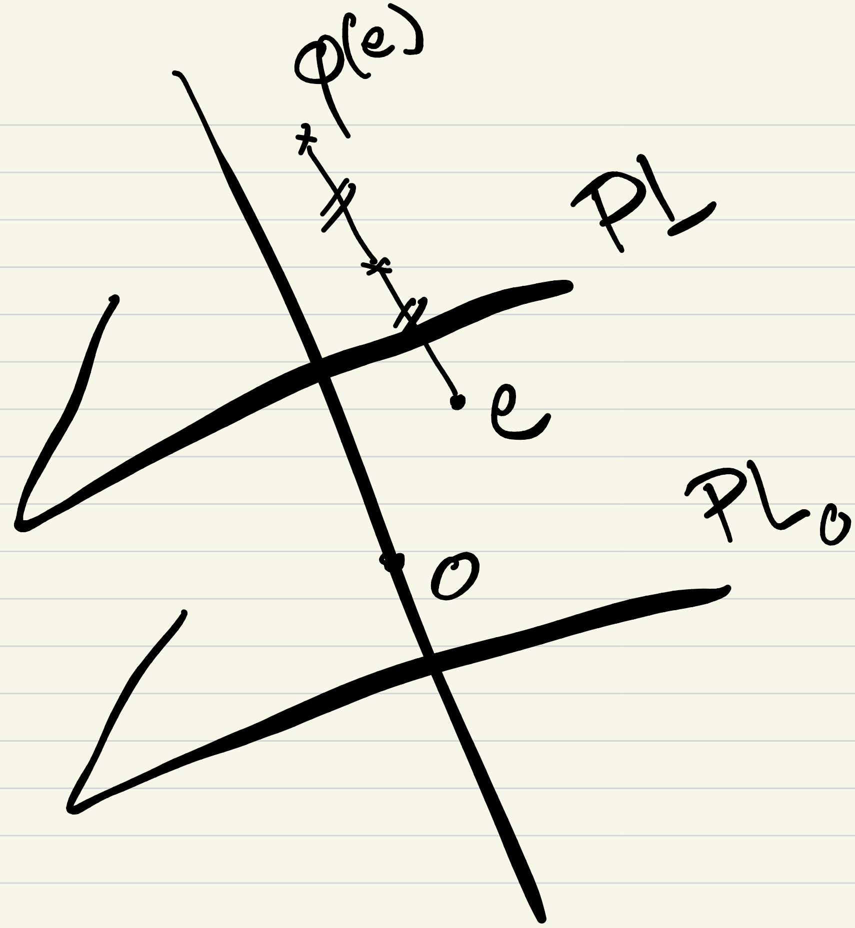
Anti-déplacements :

- φ_0 = symétrie / plan $PL_0 = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$

$$\mathrm{Fix}(\varphi_0) = PL_0$$

1er cas $\vec{u} \perp PL_0 \Rightarrow \mathrm{Fix}(\varphi) =$ plan affine de direction PL_0

φ = symétrie orthogonale / à ce plan affine



φ(e)
PL
e
PL_0
O

— si $\vec{u} \not\parallel PL_0$ $\quad \vec{v} \neq 0 \quad w$

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \qquad \vec{w} \perp PL_0$$

$$\varphi = t_{\vec{v}} \circ \varphi' = t_{\vec{v}} \circ (t_{\vec{w}} \circ \varphi_0)$$

φ' = symetrie / plan affine $\parallel PL_0$

φ = composée de φ' avec $t_{\vec{v}}$ = translation parallele à PL_0

$Fix(\varphi) = \emptyset$ $\quad \varphi$ = Symetrie glissée.

- $\varphi_0 =$ antirotation d'angle $c+is$
  - si $c+is = 1$ $\varphi_0 =$ symetrie$/_{PL_0}$
    deja discuté
  - si $c+is \neq 1$ $\mathrm{Fix}(\varphi_0) = \{0\}$
    car φ_0 n'a pas $+1$ comme valeur propre. (sinon φ_0 aurait 2 vp $-1, +1$ et donc une 3^{eme} $= \pm 1 = +1$ exclu)

$$\Rightarrow \vec{u} \perp Fix(\varphi_0) = \{0\}$$

$Fix(\varphi)$ = sous espace affine de direction $\{0\}$ = pt ds l'espace

φ est une antirotation avec un seul pt fixe. $Fix(\varphi) = \{P\}$

P = centre de l'antirotation

Cas particulier : $c + is = -1$

$$\varphi_0 = -Id = \text{Symétrie} / \vec{O}$$

$$\varphi = \text{Symétrie} / \operatorname{Fix}(\varphi) = \{P\}$$

Groupes finis d'isometries

d'isometrie

Théorème 4.2. *Soit $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+$ un groupe fini d'isometries speciales, alors en tant que groupe abstrait G est isomorphe a l'un des groupes suivant:*

(1) *Un groupe cyclique.*
(2) *Un groupe dihedral.*
(3) *Le groupe alterne alterne $\mathfrak{A}_4$ (d'ordre 12.)*
(4) *Le groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$ (d'ordre 24.)*
(5) *Le groupe alterne $\mathfrak{A}_5$ (d'ordre 60.)*

et chacun des groupes ci-dessus peut-etre realise comme groupe fini d'isometries lineaires speciales de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs tout groupe fini d'isometries speciales est conjugue a l'un de ces groupes par une isometrie speciale.

Définition 4.1. *Soit* $n \geqslant 1$ *et* $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, \cdots, n\})$ *le groupe symetrique de* n *elements. On rappelle que le groupe* $\mathfrak{S}_n$ *admet un morphisme (de groupe) a valeurs dans le groupe multiplicatif* $\{\pm 1\}$ *(la "signature") qui est non-trivial:*

$$\mathrm{sign} : \sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}.$$

Le noyau de sign *est appelle groupe alterne et est note* $\mathfrak{A}_n$*:*

$$\mathfrak{A}_n = \ker(\mathrm{sign}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \mathrm{sign}(\sigma) = \det(\varphi_\sigma) = +1\}.$$

Comme sign *est non-trivial, c'est un morphisme surjectif et on a*

$$\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \{\pm 1\};$$

ainsi $\mathfrak{A}_n$ *est d'indice* 2 *dans* $\mathfrak{S}_n$ *ou de maniere equivalente d'ordre* $n!/2$.

Rmq : le groupe alterné $|\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2} = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{2}$

$\mathfrak{A}_n$ = est l'unique sous-gpe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice 2.

<u>Rmq</u>: Gp d'isometries non-speciales.

Si G est un gpe fini d'isometries contenant une isometrie non-speciale

$$G^+ = G \cap \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+$$

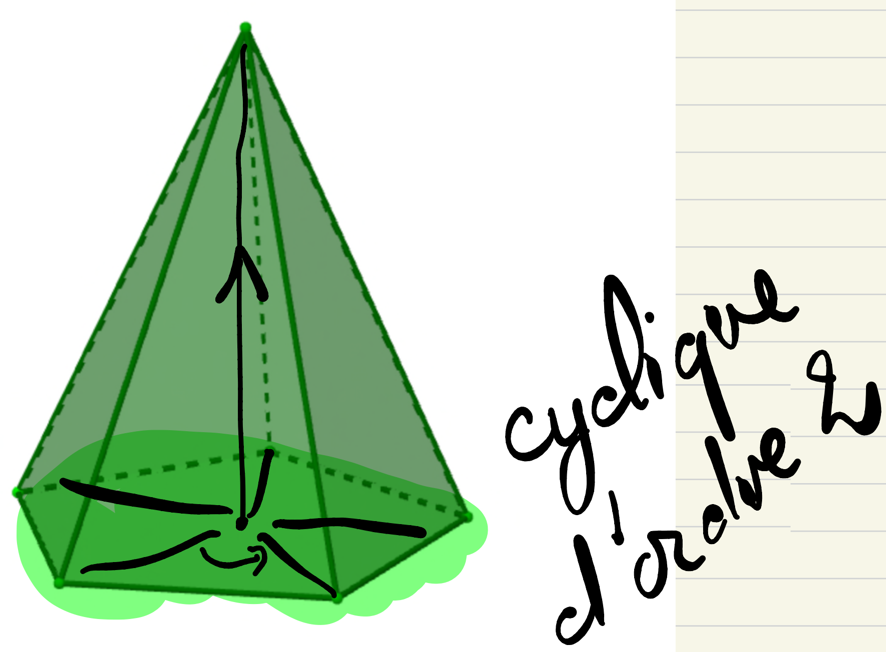
alors

G^+ est d'indice 2 dans G.

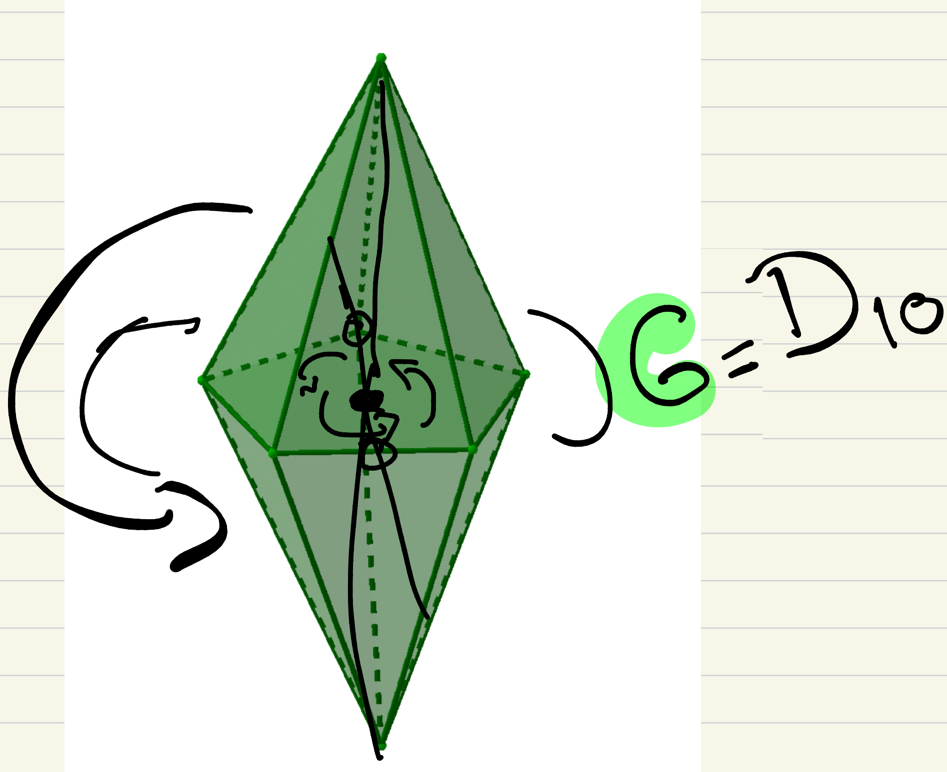
Réalisation Géometrique

Thm: Soit G un groupe fini d'isometries speciales d'ordre $n \geq 3$ alors G est le groupe des isometries speciales de l'un des polytopes convexes suivants.

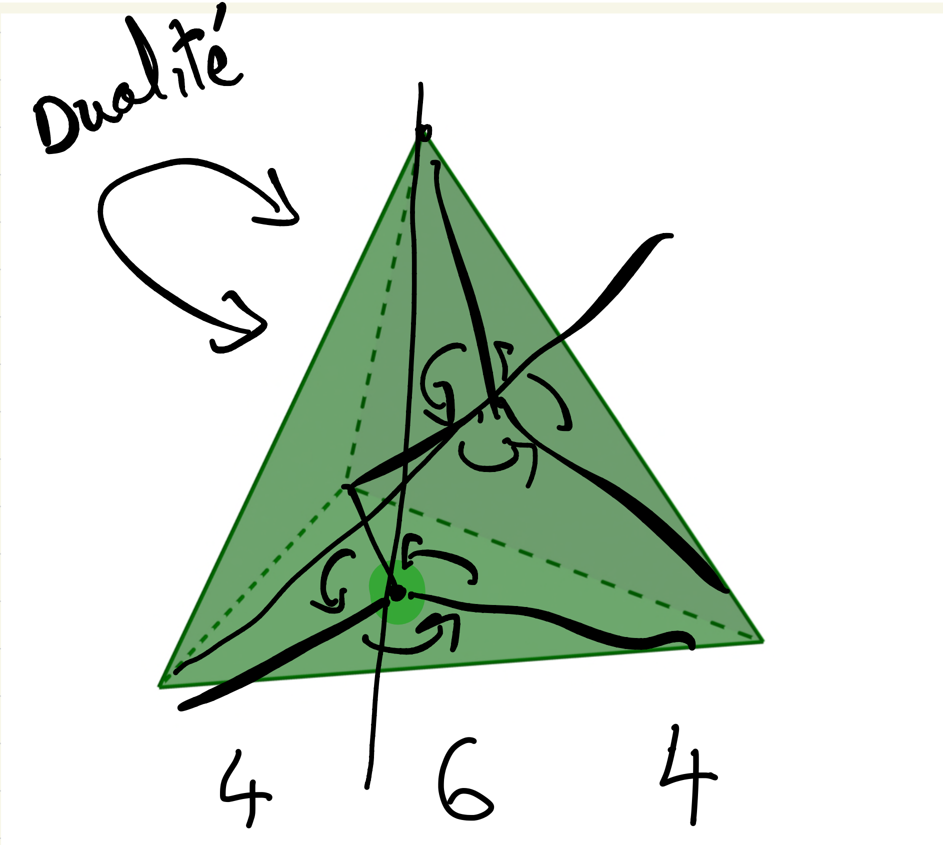
(1) *Si G est cyclique d'ordre $n \geqslant 3$ alors G est realisable comme le groupe des isometries speciales preservant un cone polyhedral convexe a $n+1$ sommets dont la base est un polygone regulier a n sommets et dont le dernier sommet est sur l'axe perpendiculaire au plan du polygone et passant par son centre. Si $n = 3$, on supposeque les aretes ne sont pas toutes de meme longueur: ie. que ce cone n'est PAS un tetraedre regulier.*



(2) *Si G est dihedral d'ordre $2n \geqslant 6$ alors G est le groupe des isometries speciales d'un double-cone obtenu comme la reunion d'un cone de base un polygone regulier a n cotes comme ci-dessus et de son symetrique par rapport au plan de la base du cone. Si $n = 4$, on suppose, de plus, que les aretes ne sont pas toutes de meme longueur: ie. que ce double cone n'est PAS un octahedre regulier.*

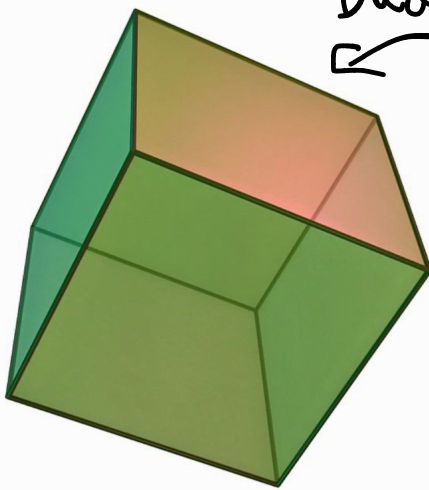


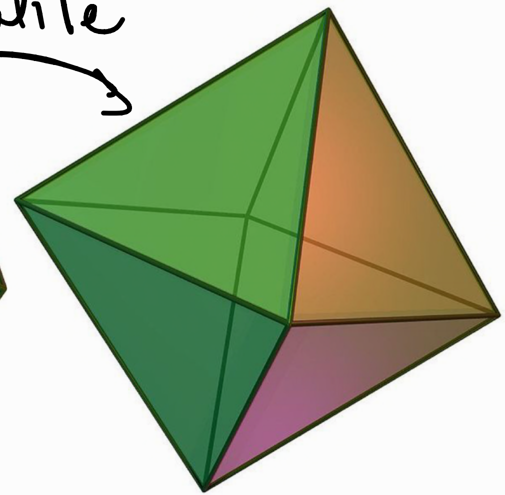
(3) *Si G est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_4$ alors G est le groupe des isometries speciales d'un tetraedre regulier.*



(4) *Si G est isomorphe au groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$ alors G est le groupe des isometries speciales d'un cube (ainsi que d'un octaedre regulier).*

Dualité

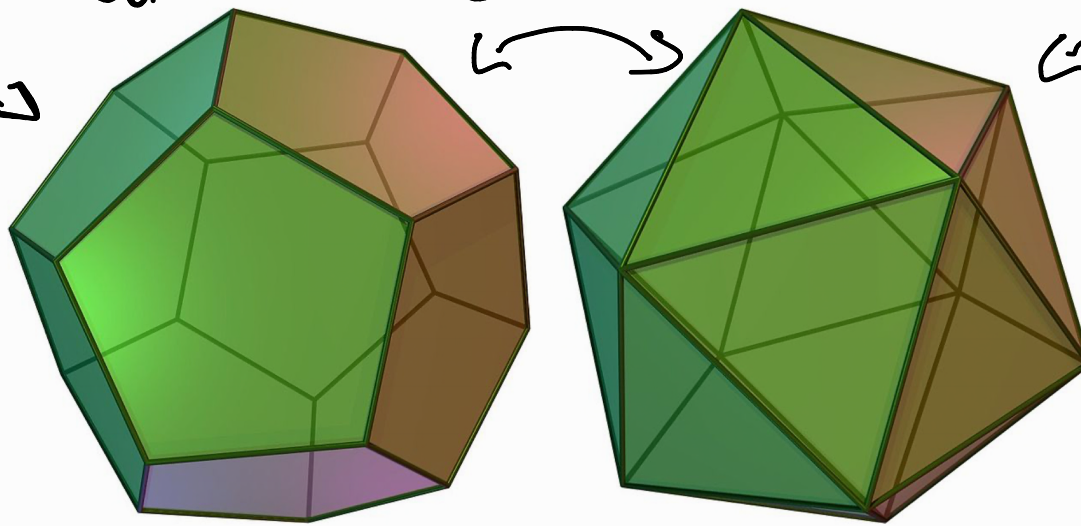




8 12 6   6 12 8

(5) *Si G est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_5$ alors g est le groupe des isometries speciales d'un dodecaedre regulier (et d'un l'icosaedre regulier).*

Dodecahedre Dualité Icosahedre



12 30 20 20 30 12