Math 125 - 18 mai 2020

Groupes finis d'isométries

Groupes finis d'isometries

d'isometrie

THÉORÈME 4.2. *Soit* $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+$ *un groupe fini d'isometries speciales, alors en tant que groupe abstrait* G *est isomorphe a l'un des groupes suivant:*

(1) *Un groupe cyclique.*
(2) *Un groupe dihedral.*
(3) *Le groupe alterne alterne* $\mathfrak{A}_4$ *(d'ordre* 12.*)*
(4) *Le groupe symetrique* $\mathfrak{S}_4$ *(d'ordre* 24.*)*
(5) *Le groupe alterne* $\mathfrak{A}_5$ *(d'ordre* 60.*)*

et chacun des groupes ci-dessus peut-etre realise comme groupe fini d'isometries lineaires speciales de $\mathbb{R}^3$. *Par ailleurs tout groupe fini d'isometries speciales est conjugue a l'un de ces groupes par une isometrie speciale.*

Définition 4.1. *Soit* $n \geqslant 1$ *et* $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, \cdots, n\})$ *le groupe symetrique de* n *elements. On rappelle que le groupe* $\mathfrak{S}_n$ *admet un morphisme (de groupe) a valeurs dans le groupe multiplicatif* $\{\pm 1\}$ *(la "signature") qui est non-trivial:*

$$\mathrm{sign} : \sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}.$$

Le noyau de sign *est appelle groupe alterne et est note* $\mathfrak{A}_n$*:*

$$\mathfrak{A}_n = \ker(\mathrm{sign}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \mathrm{sign}(\sigma) = \det(\varphi_\sigma) = +1\}.$$

Comme sign *est non-trivial, c'est un morphisme surjectif et on a*

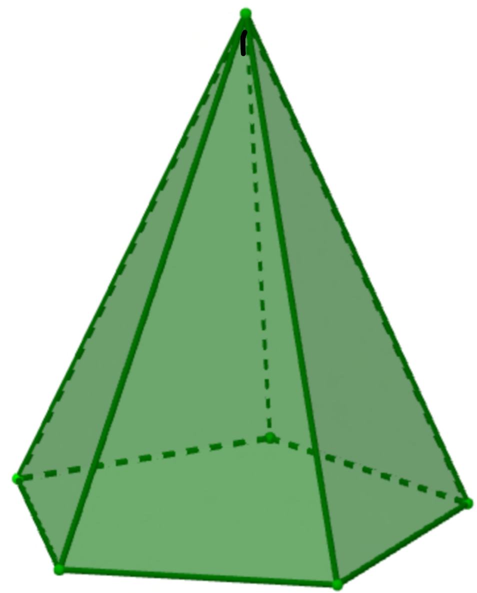
$$\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \{\pm 1\};$$

ainsi $\mathfrak{A}_n$ *est d'indice* 2 *dans* $\mathfrak{S}_n$ *ou de maniere equivalente d'ordre* $n!/2$.

Réalisation Géometrique

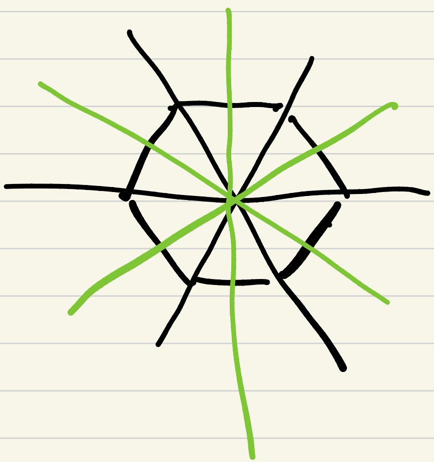
Thm: Soit G un groupe fini d'isometries speciales d'ordre $n \geq 3$ alors G est le groupe des isometries speciales de l'un des polytopes convexes suivants.

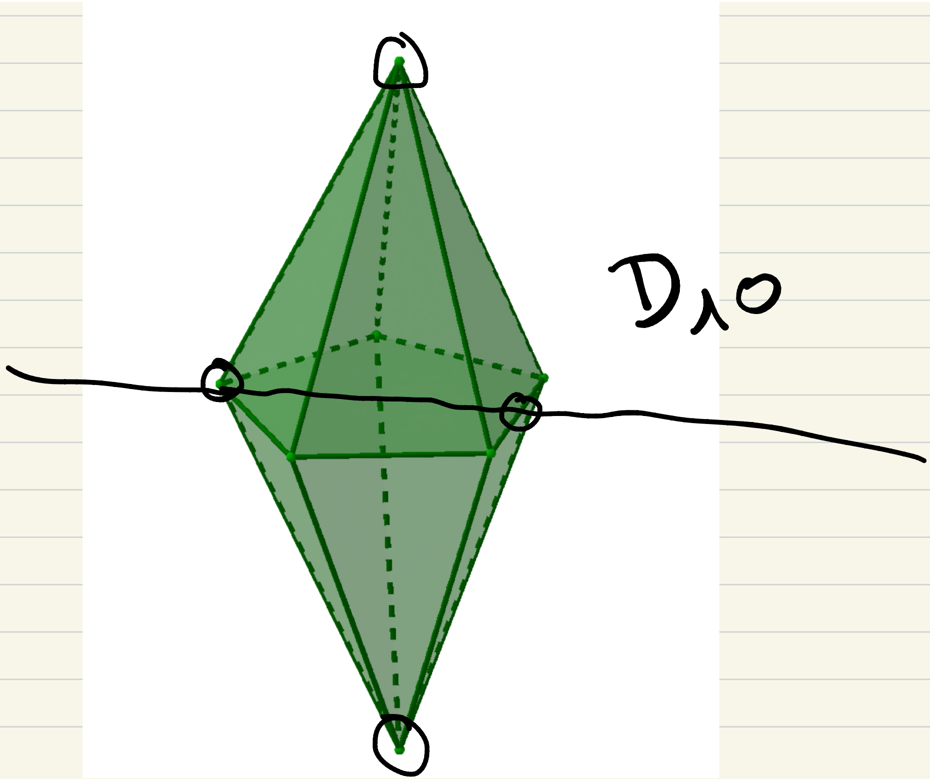
(1) *Si* G *est cyclique d'ordre* $n \geqslant 3$ *alors* G *est realisable comme le groupe des isometries speciales preservant un cone polyhedral convexe a* $n+1$ *sommets dont la base est un polygone regulier a* n *sommets et dont le dernier sommet est sur l'axe perpendiculaire au plan du polygone et passant par son centre. Si* $n = 3$, *on supposeque les aretes ne sont pas toutes de meme longueur: ie. que ce cone n'est PAS un tetraedre regulier.*



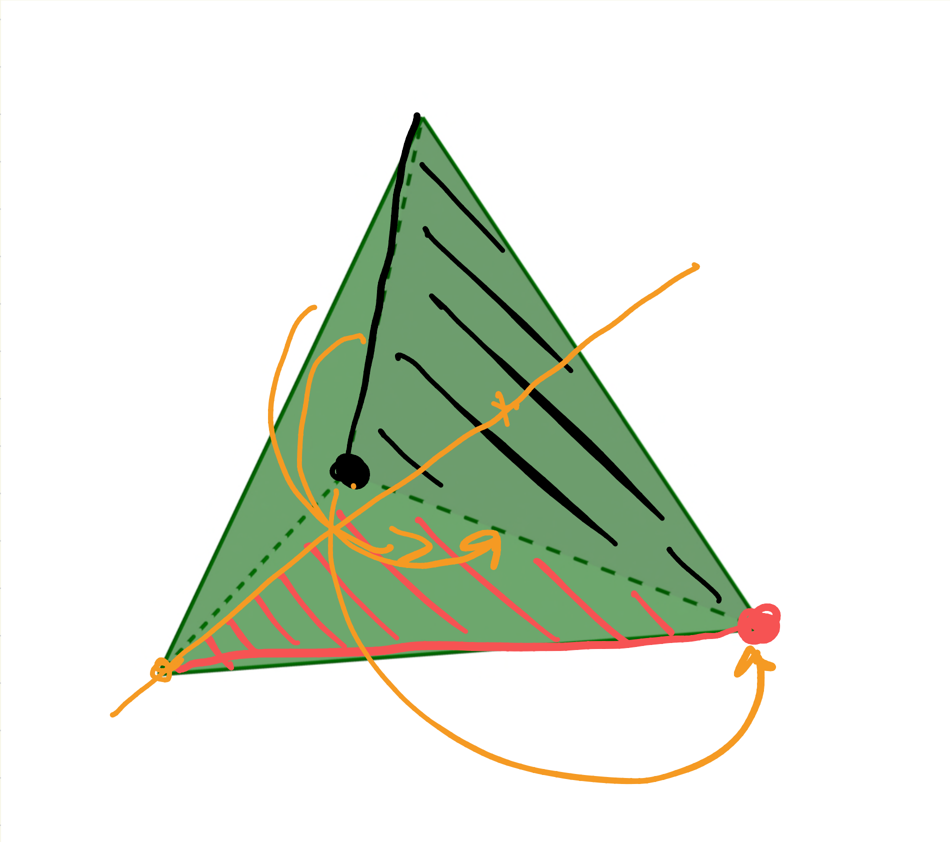
C_5

(2) *Si G est dihedral d'ordre $2n \geqslant 6$ alors G est le groupe des isometries speciales d'un double-cone obtenu comme la reunion d'un cone de base un polygone regulier a n cotes comme ci-dessus et de son symetrique par rapport au plan de la base du cone. Si $n = 4$, on suppose, de plus, que les aretes ne sont pas toutes de meme longueur: ie. que ce double cone n'est PAS un octahedre regulier.*

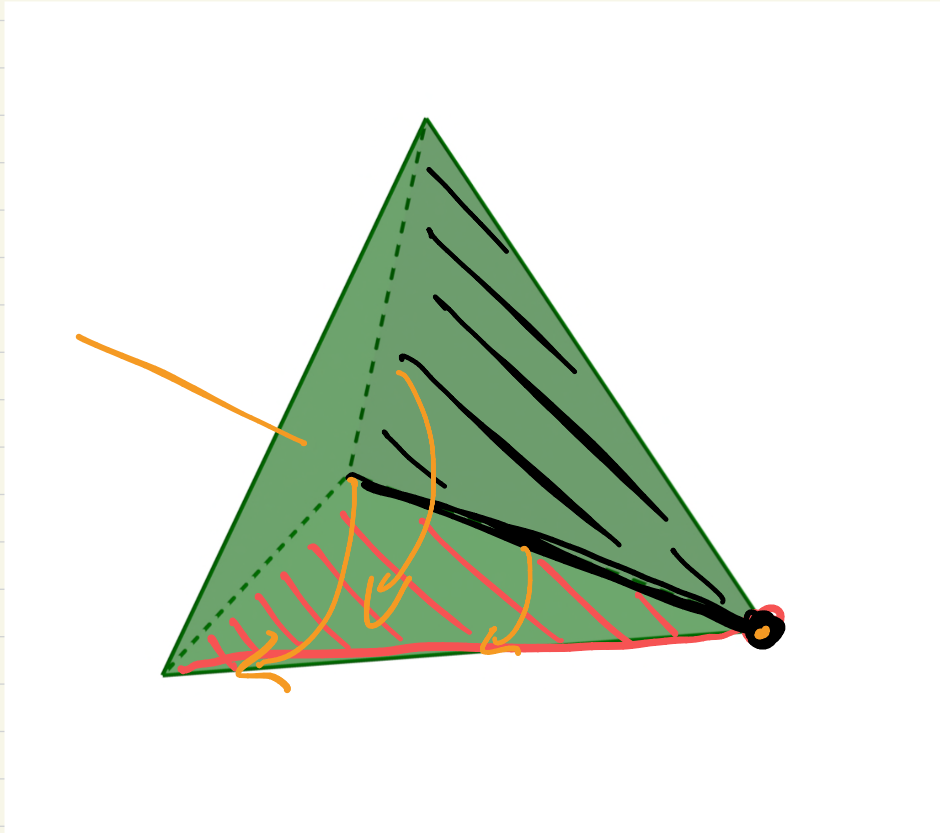




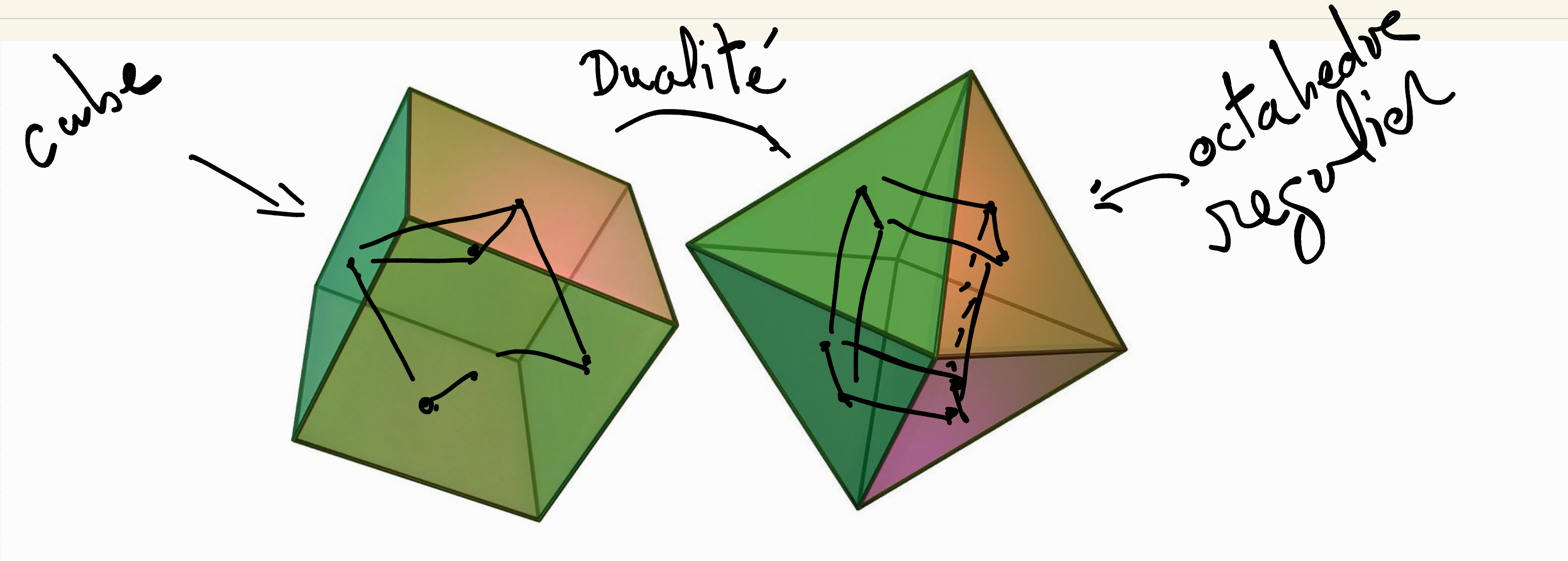
(3) *Si G est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_4$ alors G est le groupe des isometries speciales d'un tetraedre regulier.*



(3) *Si G est isomorphe au groupe alterne $\mathfrak{A}_4$ alors G est le groupe des isometries speciales d'un tetraedre regulier.*



(4) *Si G est isomorphe au groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$ alors G est le groupe des isometries speciales d'un cube (ainsi que d'un octaedre regulier).*

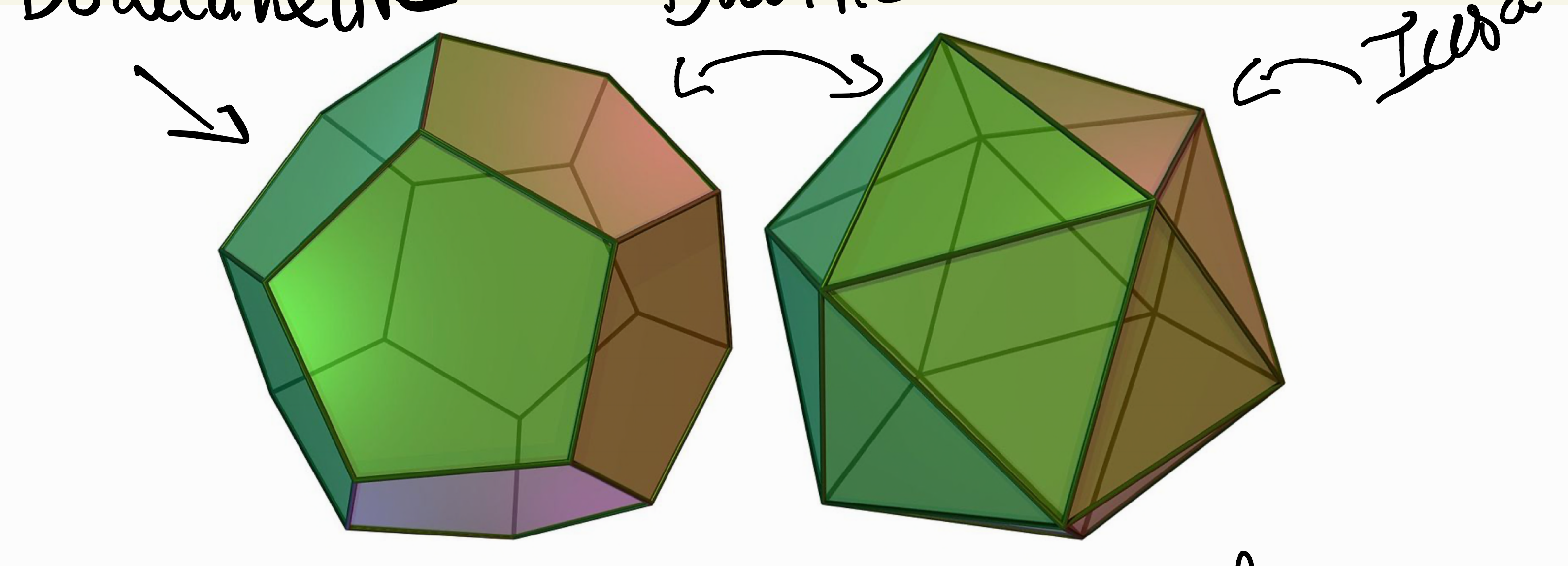


$s=8 \quad a=12 \quad f=6$ $\qquad$ $s=6 \quad a=12 \quad f=8$

speciales d'un cube (ainsi que d'un octaedre regulier).

(5) *Si G est isomorphe au groupe alterne* $\mathfrak{A}_5$ *alors g est le groupe des isometries speciales d'un dodecaedre regulier (et d'un l'icosaedre regulier).*

Dodecahedre Dualité Icosahedre



$s=20$ $a=30$ $f=12$ $s=12$ $a=30$ $f=20$

Polytopes (convexe)

Définition 4.3. *Un polytope* $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^3$ *est un sous-ensemble compact d'interieur non-vide obtenu comme intersection d'un ensemble fini de demi-espaces fermes de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathbf{P} = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{d}\mathbf{E}_i$$

avec

$$\mathrm{d}\mathbf{E}_i = \{P \in \mathbb{R}^3,\ \langle P, \vec{w}_i \rangle - h_i \leqslant 0\}$$

avec $\vec{w}_i \in \mathbb{R}^3$ *et* $h_i \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION 4.10. *soit* $\mathbf{P}$ *un polytope; un drapeau de* $\mathbf{P}$ *est la donnee d'un triplet*

$$D = (\mathbf{S}, \mathbf{A}, \mathbf{F}) \in S(\mathbf{P}) \times A(\mathbf{P}) \times F(\mathbf{P})$$

tel que

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{P}.$$

On note $D(\mathbf{P})$ *l'ensemble des drapeaux de* $\mathbf{P}$

DÉFINITION 4.11. *Un polytope est regulier si son groupe d'isometries agit transitivement sur l'espace des drapeaux* $D(\mathbf{P})$. *Un polytope regulier est appelle solide platonicien.*

THÉORÈME 4.9. *A isometrie et homothetie pres, les seuls polytopes reguliers sont le tetraedre (regulier), l'hexaedre (regulier) encore appelle "cube", l'octaedre regulier et l'icosaedre (regulier)* et le dodecahedre (regulier)

PROPOSITION 4.1. *Soit $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ un groupe fini d'isometries; il existe $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ qui est un point fixe de tout element de G.*

$\forall g \in G \quad g(e) = e.$

Preuve: Soit $P \in \mathbb{R}^3$ et soit

$G.P = \{ g(P) \quad g \in G \}$ l'orbite de ce point.

Soit $e = \mathrm{Bar}\left(G.P, \frac{1}{|G|}\right)$

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(P)$$

e est un pt fixe de tous les élts de G

Soit $g' \in G$

$$g'(e) \overset{?}{=} e$$

g' est une application affine et donc preserverve les barycentres

$$g'(e) = g'\left(\mathrm{Bar}\left(G.P, \frac{1}{|G|}\right)\right)$$

$$\overset{g' \text{ affi}}{=} \mathrm{Bar}\left(g'(G.P), \frac{1}{|G|}\right)$$

$$g'(e) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g'(g(P))$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g' \circ g\,(P) = \frac{1}{|G|} \sum_{g'' \in G} g''(P)$$

Quand g parcours G $\quad g' \circ g$ parcours G

$g'' = g' \circ g$

$= e$

$\square$

COROLLAIRE 4.1. *Soit G un groupe fini d'isometries affines alors il existe une translation t tel que le conjugue*

$$\mathrm{Ad}(t)(G) = t \circ G \circ t^{-1} \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_0$$

est forme d'isometries lineaires.

Preuve: Soit e un pt fixe pour G

et soit $t = t_{-e}$ = translation par $-e$

$$G_0 = t \circ G \circ t^{-1} \ni t_{-e} \circ g \circ t_e \quad g \in G$$

$$t_{-e} \circ g \circ t_e(\vec{0}) = t_{-e}(\underset{\substack{\shortparallel \\ e}}{g(e)}) = \underbrace{t_{-e}(e)}_{=0} \qquad \square$$

La formule de Burnside (Rappel)

Théorème 1.7 (Formule de Burnside). *Soit G un groupe fini et $G \curvearrowright X$ un G-ensemble fini. Soit* $g \in G$

$$X^g = \{x \in X,\ g.x = x\}$$

l'ensemble des points fixes de G, on a

$$|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| :$$

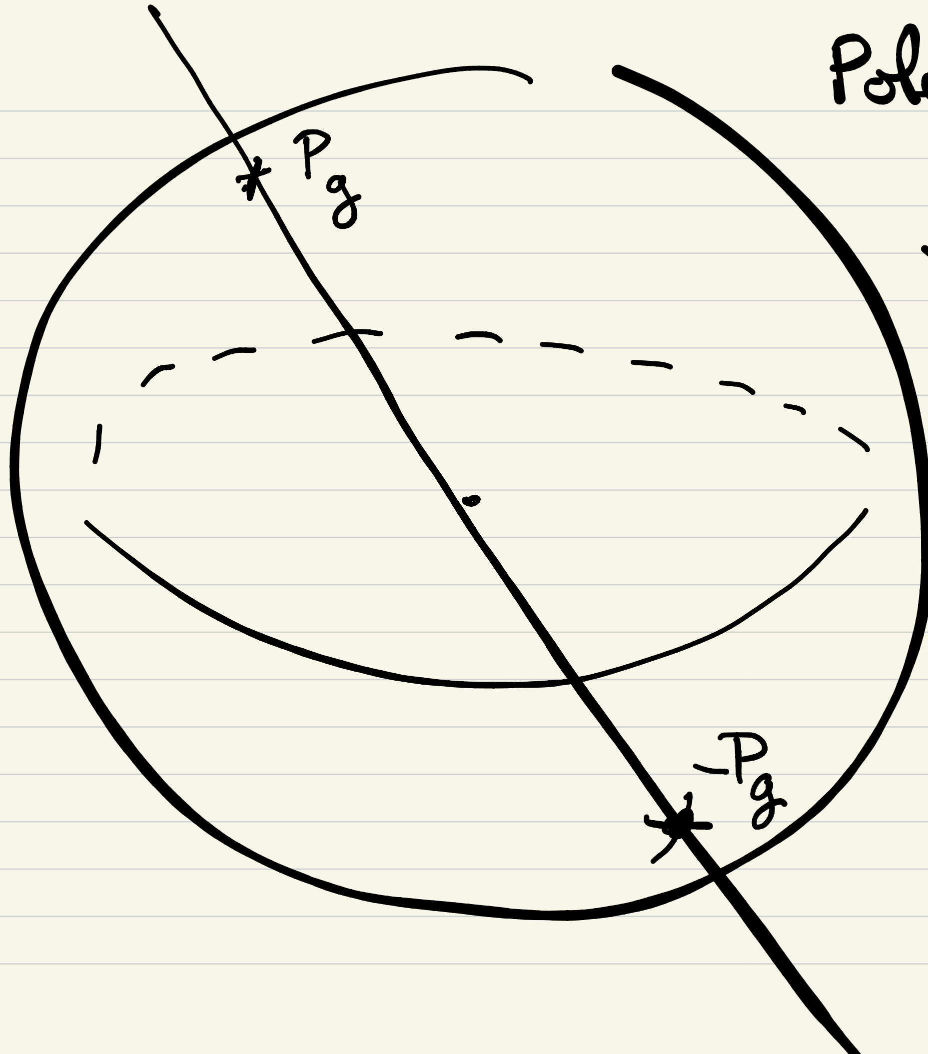
le nombre d'orbites de G dans X est la valeur moyenne du nombre de points fixes des element de G.

DÉFINITION 4.2. *Soit* $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0}}$ *une rotation non triviale* $(g \neq \mathrm{Id})$. *Les poles de* g *sont les deux points (symetriques par rapport a l'origine) a l'intersection de la sphere unite*

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \ \|x\| = 1\}$$

et de l'axe (des points fixes) de g*:*

$$\{P_g, -P_g\} = \mathrm{Fix}(g) \cap S^2.$$



S^2

Pole de g $= \{P_g, -P_g\}$

X = l'ensemble des pôles des élément non-triviaux de $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_0^+$

X est un ensemble fini de Cardinal

$$|X| \leq 2(|G|-1)$$

Le groupe G agit sur X :

si $g \in G$ et P est un pôle alors

gP est encore un pôle d'un elt de G

P = pole de $g' \in G - \{Id\}$

$P \in S^2$ $\qquad$ gP est un pole de

$$Ad(g) \cdot g' = g \cdot g' \cdot g^{-1}.$$

- Comme P est a distance 1 de $\vec{O}$ et que g est linéaire une isométrie $g.P$ est a distance 1 de $\vec{O}$

$gP \in S^2$.

$$g \circ g' \circ g^{-1}(gP) = g(g'(g(g^{-1}P)))$$
$$= g(g'(P)) = g(P) = gP$$

gP est un pt fixe de $Ad(g)(g') \in G - \{I_d\}$

$G \curvearrowright X \qquad |X| \leq 2(|G|-1)$

$X = \bigsqcup_{i=1}^{o} \mathcal{O}_i \qquad \mathcal{O}_i$ = G-orbite dans X

$o = |X/G| \geq 1.$

Soit $P_i \in \mathcal{O}_i \quad i \leq o \qquad G_i = \mathrm{Stab}_G(P_i)$

son stabilisateur

les stabilisateurs des pts d'une m̂ orbite sont conjugués donc isomorphes

soit $s_i = |G_i|$ ne dépend que de O_i
mais du choix de P_i

Thm Orbite-Stab : $|O_i| = \left|G/G_i\right| = |G|/s_i$

Convention : On suppose qu'on a numéroté les orbites de sorte que la suite $(s_i)_{i\geq 1}$ soit $\nearrow$

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_0$$

La suite des cardinaux des orbites $(|O_i|)_{i \geq 1}$ est $\searrow$

$$|O_i| = |G|/s_1 \geq |G|/s_2 \geq \dots \geq |G|/s_0 = |O_0|$$

Proposition 4.2. *Le G-ensemble X n'a que deux ou trois orbites et les seules possibilites sont les suivantes:*

	o	s_1	s_2	s_3	$\lvert G\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_1\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_2\rvert$	$\lvert\mathcal{O}_3\rvert$	$\lvert X\rvert$	
cyclique	2	n	n		n	1	1		2	$n \geq 2$
dihedral	3	2	2	n	$2n$	n	n	2	$2n+2$	$n \geq 2$
$\mathfrak{A}_4$	3	2	3	3	12	6	4	4	14	
$\mathfrak{S}_4$	3	2	3	4	24	12	8	6	26	
$\mathfrak{A}_5$	3	2	3	5	60	30	20	12	62	

Preuve : On applique Burnside

à $G \curvearrowright X$

$$0 = |G\backslash X| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

$$= \frac{1}{|G|}\left(|X^{Id}| + \sum_{g\neq Id}|X^g|\right)$$

$$= \frac{1}{|G|}\left(|X| + \sum_{g\neq Id}|X^g|\right)$$

Si $g\neq Id$ $\quad |X^g| = 2 = |\text{Poles de } g|$

$$0 = \frac{1}{|G|}(|X| + 2(|G|-1)$$

On utilise la formule des classe

$$|X| = \sum_{i=1}^{o} |O_i| = \sum_{i=1}^{o} \frac{|G|}{s_i}$$

$$o = \frac{1}{|G|}\left(|X| + 2(|G|-1)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{|X|}{|G|} &= \sum_{i=1}^{o} \frac{1}{s_i} \\ o &= \sum_{i=1}^{o} 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{i=1}^{o}\left(1 - \frac{1}{s_i}\right)$$

$$1 \leq 2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{i=1}^{o} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{s_i}\right)}_{<1} < o$$

<u>Rmq</u> : $s_i \geq 1 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{s_i} < 1$

G est non-trivial $\Longrightarrow |G| \geq 2$ $\quad \frac{1}{|G|} \leq \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad o \geq 2 \quad \left(G \curvearrowright X \text{ n'est pas transitive}\right)$$

$\forall i = 1, \dots, o$ $\quad s_i \geq 2$ en effet un pole d'une rotation est toujours fixe par Id et par sa rotation

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{s_i} \geq \frac{1}{2}$$

$$2-\frac{2}{|G|}=\sum_{i=1}^{o}\left(1-\frac{1}{s_i}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot o$$

$$2\leq o\leq 2\underbrace{\left(2-\frac{2}{|G|}\right)}_{<2}<4$$

$$o=2 \text{ ou } 3$$

$$o = 2 = \frac{1}{|G|}\Big(|X| + 2\big(|G|-1\big)\Big)$$

$$\Longrightarrow |X| = 2 \qquad X = \{P, -P\}$$

P un pole commun a tous les elements non-triviaux de G

$$|G| = n \geq 2$$

$o=3 \quad O_1, O_2, O_3$

$|G_i| = |G|/s_i \quad i=1,2,3$

$2 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3$

$$3 = \frac{1}{|G|}\left(|X| + 2(|G|-1)\right)$$

$$\Rightarrow \quad |X| = |G| + 2$$

$$2 - \frac{2}{|G|} = 1 - \frac{1}{s_1} + 1 - \frac{1}{s_2} + 1 - \frac{1}{s_3}$$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1 + \frac{2}{|G|} > 1$$

si $s_1 \geq 3 \Rightarrow s_2 \geq 3$ et $s_3 \geq s_2 \geq s_1 \geq 3$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \leq 3\,\frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = 2 \qquad s_2 \geq 2 \qquad s_3 \geq s_2$$

$$\lightning \quad \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{161} > \frac{1}{2},$$

on ne peut avoir $s_2 \geq 4$ car sinon $s_3 \geq 4$ et $\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \leq 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad s_2 = 2 \text{ ou } 3$$

si $s_2 = 2$ $\quad s_3 = \frac{|G|}{2} = n \geq 2$

$\Rightarrow |G| = 2n \quad n \geq 2$

$\Rightarrow s_1 = 2 \quad s_2 = 2 \quad s_3 = n \geq 2$

$|G_1| = n \quad |G_2| = n \quad |G_3| = 2$

si $s_2 = 3$ $s_1 = 2$ $s_3 \geq s_2 = 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{s_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{|G|} > \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow s_3 \leq 5$$

- $s_3 = 3$
- $s_3 = 4$ $\Longrightarrow$ remplit les 3 derniere lignes.
- $s_3 = 5$

$\square$