EPFL 25 Juin 2019
Géométrie II, MATH-125

Examen

Nom : Prénom : No SCIPER :

Consignes :

- **Les notes de cours et les notes d'exercices ne sont pas autorisées**
- **Le formulaire standard est autorisé.**
- **Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.**
- **Sauf mention explicite du contraire on a le droit d'admettre un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question.**
- **L'examen est LONG mais il n'est pas nécessaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.**
- **Toutes les réponses doivent être rédigées sur la copie et PAS sur le sujet d'examen. Les feuilles de brouillon ne sont PAS acceptées comme copies.**
- **En plus du Nom, Prenom, SCIPER inscrit obligatoirement sur la première feuille, chaque feuille de la copie doit comporter au moins un signe permettant votre identification (Nom, SCIPER, initiales,...)**
- **Les feuilles de votre copie doivent être retournées dans le texte de l'examen qui servira de chemise.**

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Qu'est-ce-qu'un pavage **régulier** (on ne demande PAS de definir ce qu'est un pavage.)
2. Pour chacun des deux pavages ci-dessous (cf. Figures 1 et 2),
   (a) Donner (sous la forme p??) le type du groupe des rotations affines préservant ce pavage,
   (b) Existe-t-il des symétries préservant le pavage (si il y en a preciser si elles ne sont que glissées ou si il en existe des axiales) ?
3. (VRAI ou FAUX ?) Il existe un pavage régulier du plan tel que le groupe de toutes les isométries le préservant contient un sous-groupe d'ordre 8.
4. (VRAI ou FAUX ?) Soit r_0 la rotation vectorielle d'angle $2\pi/6$ et d'axe porté par le vecteur $(2,1,-1)$ et $\vec{v}=(1,-1,1)$ alors l'isométrie $t_{\vec{v}} \circ r_0$ est d'ordre infini.

Exercice 2. Soient $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$. On considère la transformation de l'espace donnée dans la base canonique par $\varphi(x,y,z)=(X,Y,Z)$ avec

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{d}(2x-2y+az)+1 \\ Y &= \frac{1}{d}(x+by+2z)+e \\ Z &= \frac{1}{d}(cx-y+2z)+f \end{aligned}$$

1. Décrire l'ensemble des $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^5$ tels que φ est un vissage.
2. Même question en demandant que φ soit une anti-rotation.
3. Si φ n'est pas un vissage montrer que $\varphi^6 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 3. Le cube rectifié est le polytope obtenu en coupant un cube par des plans perpendiculairement aux grandes diagonales (voir la Figure 3) de sorte que les faces triangulaires s'intersectent en un sommet commun.

1. Si l'arète du cube original est de longueur a quelles sont les longueurs des arètes des faces triangulaires ?
2. Montrer que le groupe des rotations préservant le cube rectifié est le groupe des rotations du cube (on pourra réaliser le cube rectifié comme une intersection) ?

3. Recopier sur votre copie le tableau ci-dessous et le remplir (ajouter des lignes si nécéssaire) avec les données des différents types de rotations qui préservent le cube : type de point par lequel passe l'axe (en plus du centre du cube), ordre et nombre de rotations de chaque type ; pour vous aider on a déjà remplit une des lignes (par définition l'axe de la rotation Identité passe "partout").

Axe passant par	Ordre	Nombre
Partout	1	1

4. On dispose de t couleurs pour colorier les faces triangulaires et de c couleurs pour les faces carrés. Combien de modèles $C(c, t)$ de cubes rectifiés colorés est-il possible d'obtenir ?
   Données : $C(3, 1) = 57, C(1, 2) = 23$.

Exercice 4 (Cubes et tétrahèdres)**.** On considère le cube de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets ont pour coordonnées

$$\frac{1}{2}(1 \pm 1, 1 \pm 1, 1 \pm 1) = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0) \cdots , (1,1,1)\}.$$

1. A partir des sommets du cube, on peut former 2 tetrahèdres réguliers T_1, T_2. Donner pour chacun de ces tétrahèdres l'ensemble des sommets du cube qui le compose. Quel est la longueur des arètes de ces tétrahèdres ?
2. On considère le tétrahèdre (disons T_1) dont un des sommets est le point $P_1 = (0, 0, 0)$. On note P_2, P_3, P_4 les trois autres sommets (qu'on numérotera comme on préfère). Montrer que le cosinus de l'angle de la rotation d'axe (P_1P_2) qui envoie la face de T_1 contenant le point P_3 sur la face de T_1 contenant le point P_4 vaut
$$\cos(\theta) = 1/3.$$
3. On a vu en cours que le groupe des rotations du cube induit une action (par permutation) sur l'ensemble des 4 "grandes diagonales" du cube rendant le groupe isomorphe a $\mathfrak{S}_4$. Ce même groupe agit également sur l'ensemble $\{T_1, T_2\}$. Montrer que ces actions sont compatibles au sens suivant : les rotations du cube qui agissent trivialement sur $\{T_1, T_2\}$ sont exactement les rotations qui sont de signature $+1$ quand on les identifie avec des éléments de $\mathfrak{S}_4$. Pour ce faire, on

pourra, par exemple, calculer l'indice du sous-groupe des rotations qui agissent trivialement sur l'ensemble $\{T_1, T_2\}$.

Exercice 5. On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, pour simplifier les notations on écrira les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en *ligne* mais on les écrira en *colonne* pour les multiplier par des matrices : par exemple on ecrira $A.(x, y, z)$ pour le produit

$$A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on rappelle la notation de congruence modulo 3 : pour $m, n \in \mathbb{Z}$

$$m \equiv n \pmod 3 \iff 3 | m - n.$$

1. Quelle est la nature des transformations linéaires associées aux matrices A et B. Montrer que ces matrices sont inversibles et calculer A^{-1} et B^{-1}.
2. Soit $G = \langle A, B \rangle \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ le groupe engendré par A et B.

   On va montrer que le groupe G est un groupe libre : *c'est à dire qu'un mot réduit et non trivial dans l'alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, A^{-1}, B^{-1}\}$ n'est jamais égal a l'élément neutre. En d'autres termes toute matrice M de la forme*

   $$M = L_1. \cdots .L_n, \ n \geqslant 1$$

   telle que
   - *(M est un mot non-trivial de longueur n dans l'alphabet $\mathcal{A}$) $\forall i = 1, \cdots, n$,*

     $$L_i = A, \ A^{-1} \ \textit{ou bien } B \ \textit{ou encore } B^{-1},$$

   - *(M est un mot réduit) $\forall i = 1, \cdots n-1$, on a*

     $$L_{i+1} \neq L_i^{-1}$$

     (autrement dit $L_i.L_{i+1} \neq \mathrm{Id}_3$),

alors

$$M \neq \mathrm{Id}_3.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que comme G est libre, tout élément $g \neq e_G$ de G, s'écrit de manière *unique* sous la forme d'un mot réduit dans l'alphabet $\mathcal{A}$.

– On se donne donc un mot réduit non-trivial M et on veut montrer que $M \neq \mathrm{Id}_3$. Pour cela on va jouer au *ping-pong*.

Soit $X_3 \subset S^2$ l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de longueur 1 de la forme

$$\vec{v} = 3^{-k}(a, b\sqrt{2}, c)$$

avec $k \geqslant 0$ un entier et $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On écrira toujours un tel vecteur sous forme "réduite" c'est a dire que la puissance de k est minimale (ie. 3 ne divise pas simultanément a, b et c).

Montrer que

$$A^{\pm 1}.X_3 \subset X_3,\ B^{\pm 1}.X_3 \subset X_3 \text{ et que } G.X_3 \subset X_3.$$

3. On considère les sous-ensembles suivants de X_3 (pour chaque valeur de $\pm$)

$$X_A^{\pm} := \{\vec{v} \in X_3,\ a \pm b \equiv 0 \pmod 3,\ b \not\equiv 0 \pmod 3,\ c \equiv 0 \pmod 3\}$$

$$X_B^{\pm} = \{\vec{v} \in X_3,\ b \pm c \equiv 0 \pmod 3,\ b \not\equiv 0 \pmod 3,\ a \equiv 0 \pmod 3\}.$$

Montrer que

$$A.X_A^+ \subset X_A^+,\ A^{-1}.X_A^- \subset X_A^-$$
$$B.X_A^{\pm} \subset X_B^-,\ B^{-1}.X_A^{\pm} \subset X_B^+.$$

On admet les inclusions similaires

$$B.X_B^- \subset X_B^-,\ B^{-1}.X_B^+ \subset X_B^+,\ A.X_B^{\pm} \subset X_A^+,\ A^{-1}.X_B^{\pm} \subset X_A^-.$$

4. Montrer que si M est un mot réduit qui ne se termine pas par A^{-1} ($L_n \neq A^{-1}$) alors pour tout $\vec{v} = 3^{-k}(a, b\sqrt{2}, c) \in X_A^+$, si on écrit

$$M.\vec{v} = 3^{-k'}(a', b'\sqrt{2}, c')$$

on a $b' \not\equiv 0 \pmod 3$.

5. On note $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ le premier vecteur de la base canonique. Soit M un mot réduit se terminant par A. Calculer $A.\mathbf{e}_1$ et en déduire que $M.\mathbf{e}_1$ est de la forme $3^{-k'}(a', b'\sqrt{2}, c')$ avec $b' \not\equiv 0 \pmod 3$. En déduire que $M \neq \mathrm{Id}_3$.
6. En général, montrer grâce à une conjugaison convenable qu'on peut toujours supposer que M se termine par A.
7. Soit r_1, r_2 deux rotations linéaires de $\mathbb{R}^3$ d'angles $\arccos(1/3)$ et d'axes perpendiculaires. Montrer que le groupe $\langle r_1, r_2 \rangle \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0}}^+$ est libre.

FIGURE 1 – Pavage 1

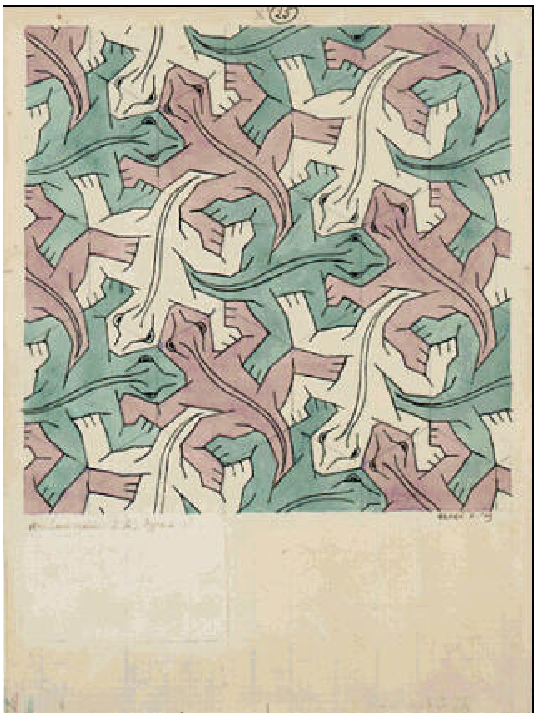

FIGURE 2 – Pavage 2

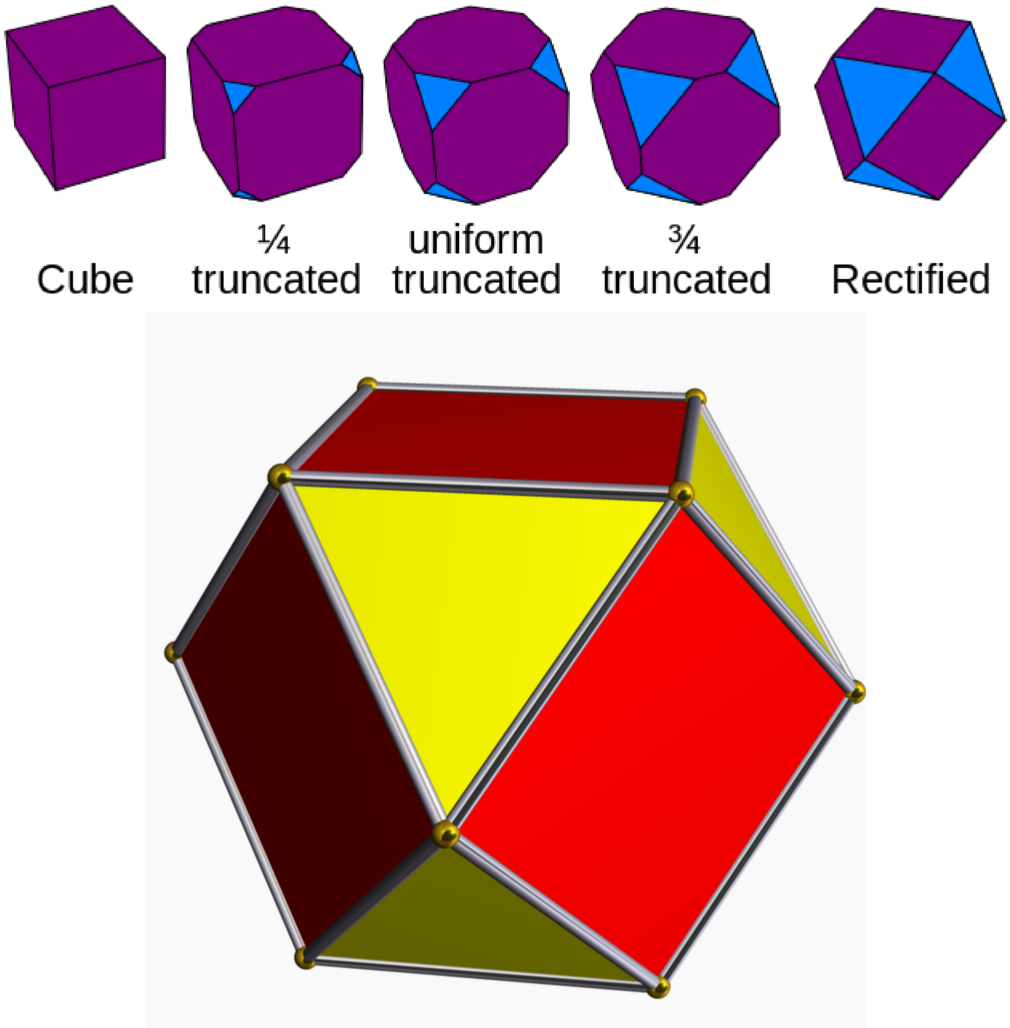

Figure 3 – Cube rectifié