Série 11

Exercise 4

1. Il suffit de le démontrer pour toute transposition $\sigma = (ij)$ $(i \neq j)$, $\det \delta_\sigma = -1$.

2. L'inverse de δ_σ est simplement $\delta_{\sigma^{-1}}$, ce qui implique l'isométrie.

3. Pour $\sigma = (1,2)$ la matrice δ_σ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   c'est une symmétrie.

4. Il suffit de le démontrer pour une transposition $\sigma = (ij)$. On a alors $\delta_\sigma(e_1 + \ldots + e_i + \ldots + e_j + \ldots + e_n) = e_1 + \ldots + e_j + \ldots + e_i + \ldots + e_n$.

5. On choisit une BON $b_1, \ldots, b_n$, avec $b_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{N} e_i$. Pour toute permutation σ,b_1 est un point fixe de δ_σ. Comme la matrice de δ_σ doit être orthonormale, cela implique la forme désirée. Finalement on a $\det M_{\mathcal{B},\delta_\sigma} = \det \delta_\sigma = \operatorname{sign}(\sigma)$.

6. On considère la fonction $\Phi : \sigma \mapsto M_{\mathcal{B},\delta_\sigma}$ qui est un morphisme de groupe et injective (la seule permutation σ telle que $\Phi(\sigma) = Id$ est la permutation identité). Pour tous σ, $\det \Phi(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma) \in \{+1, -1\}$.

7. Le groupe $\mathfrak{S}_3$ correspond au groupe de symmétrie du triangle equilatéral.

8. Tout group fini d'ordre n est isomorphe à un sous groupe G de $\mathfrak{S}_n$ qui est lui-même isomorphe à l'image de G sous Φ, qui est un sous groupe de $O_{n-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 5

1. Il suffit de vérifier que $(e_i')^T e_j' = 0$ pour chaque paire $i \neq j$.

2. Exercice 4.

3. Pour chaque cas:

   (a) $\sigma = (12)$. On a $M_{\mathcal{B},\delta_\sigma} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, en effet $\delta_\sigma(e_1') = -e_1'$, $\delta_\sigma(e_2') = e_2'$ et $\delta_\sigma(e_3') = e_3'$.

(b) $\sigma = (123)$. On a $M_{\mathcal{B},\delta_\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, en effet $\delta_\sigma(e'_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}e'_2 - \frac{1}{2}(e'_1 - e'_3)$, $\delta_\sigma(e'_2) = \frac{1}{2}(e_2 + e_3 - e_1 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e'_1 + e'_3)$ et $\delta_\sigma(e'_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}e'_2 + \frac{1}{2}(e'_1 - e'_3)$.

(c) $\sigma = (1234)$. On a $M_{\mathcal{B},\delta_\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, en effet $\delta_\sigma(e'_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}e'_2 - \frac{1}{2}(e'_1 - e'_3)$, $\delta_\sigma(e'_2) = \frac{1}{2}(e_2 + e_3 - e_4 - e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e'_1 + e'_3)$ et $\delta_\sigma(e'_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_4 - e_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e'_2 - \frac{1}{2}(e'_1 - e'_3)$.

(d) $\sigma = (12)(34)$. On a $M_{\mathcal{B},\delta_\sigma} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, en effet $\delta_\sigma(e'_1) = -e'_1$, $\delta_\sigma(e'_2) = e'_2$ et $\delta_\sigma(e'_3) = -e'_3$.