Indications pour l'examen du cours "Introduction à la géométrie Riemannienne"

EPFL, 21 juin 2021

L'examen aura lieu le 30 juin 2021 dans la sallesalle SG0211. Il durera 25 minutes. avec un temps de préparation de 30 minutes. Chaque étudiant tire une question au hasard, cette question comprend une partie théorique à développer et un exercice.

Voici ce qu'il faut savoir pour l'examen ;

1 Concepts de base

- Etre à l'aise avec les concepts de variétés différentiable, espaces tangent et cotangent, champs de vecteurs, crochets, etc.
- Notions sur les champs de tenseurs.
- Métriques riemannienne (et pseudo-riemannienne). Définition, exemples, longueur et énergie des courbes, distance, volume.
- Rappel (pullback) d'une métrique par une immersion, isométries (et le groupe d'isométries d'une variété riemannienne), applications conformes.
- Les variétés riemanniennes vues comme espace métrique.
- Savoir prouver que tout variété différentiable admet une métrique riemannienne.
- Équation d'Euler-Lagrange en général et pour le cas de l'énergie d'une courbe. Symboles de Christoffel (de première et de seconde espèces), l'équation des géodésiques.

2 Connexion, géodésiques, transport parallèle

- La notion de connexion affine sur une variété. Propriétés principales, symboles de Christoffel, torsion.
- Lemme fondamental de la géométrie riemannienne (existence et unicité de la connexion de Levi-Civita), savoir l'énoncé et la preuve. La formule de Koszul.
- Dérivée covariante et transport parallèle.
- Géodésique (définition, équation).
- Formule de variation première pour la longueur (les points critiques de la fonctionnelle longueur sont les géodésiques parametrisées à vitesse constante).
- Application exponentielle et coordonnées normales de Riemann.
- Lemme de Gauss,.
- Variétés complètes. Théorème de Hopf Rinow (énoncé et grandes lignes de la preuve)

3 Courbure

- Le tenseur de courbure de Riemann, courbures de Ricci et scalaire. Courbure sectionnelle.
- Symétries (propriétés algébriques) du tenseur de courbure.
- Sous-variétés et seconde forme fondamentale. Propriétés de ces objets.
- Courbures principales, moyenne et de Gauss. Direction principales.
- Equations de Gauss et le théorème egregium comme cas particulier.
- Formule de variation seconde pour les géodésiques (énoncé et conséquences).
- Théorème de Bonnet-Myers (énoncé et preuve).
- Champs de Jacobi : définition, lien avec les variations des géodésiques (voir prop. 4.5.2 du polycopié). Application au calcul de la courbure des surfaces.
- Théorème de Cartan-Hadamard (énoncé et idée de la preuve).