EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Exercices**
Série 1	15 septembre 2020

1.1. Montrer que tout sous espace d'un espace à base dénombrable d'ouverts est à base dénombrable d'ouverts.
Montrer la même chose pour les espaces de Hausdorff

1.2.
- Montrer que le produit de deux espaces à base dénombrable d'ouverts est à base dénombrable d'ouverts.
- Montrer que le produit de deux espaces Hausdorff est Hausdorff.
- Montrer que le produit de deux variétés topologiques est une variété topologique.

1.3. Montrer que les espaces de Hausdorff satisfont les deux propriétés suivantes:

- Toute suite convergente admet une unique limite.
- Tout sous ensemble fini est fermé.

1.4. Montrer que tout recouvrement d'ouverts d'un espace à base dénombrable d'ouverts admet un sous recouvrement dénombrable.

1.5. Un espace topologique est dit *séparable* si il existe un sous-ensemble dense dénombrable.
Prouver qu'un espace métrique (X, d) est séparable si et seulement si il est à base dénombrable d'ouverts.

1.6. Soient $X_1 = \mathbb{R} \times \{a\}$ et $X_2 = \mathbb{R} \times \{b\}$ où a, b est un ensemble de deux points. Remarquer que X_1 et X_2 sont homéomorphes à $\mathbb{R}$. Soit X l'espace quotient obtenu en identifiant (x, a) (x, b) si et seulement si $x \neq 0$. Est-ce que X est une variété topologique?