EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Exercices**
Série 2	22 septembre 2020

2.1. Soit X un espace topologique de Hausdorff. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

- X est localement compact.
- Chaque point de X est contenu dans un voisinage précompact.
- X a une base d'ouverts précompacts.

2.2. Montrer que tout sous espace ouvert ou fermé d'un espace de Hausdorff localement compact est un espace de Hausdorff localement compact.

2.3. On rappelle qu'une suite $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ d'ensembles compacts dans un espace topologique est appelé une *exhaustion de X par des ensembles compacts* si $X = \bigcup_i K_i$ et $K_i \subset \mathrm{int}(K_{i+1})$ pour tout i. Montrer qu'un espace topologique à base dénombrable d'ouverts, locallement compact et Hausdorff admet une eshaustion par des compacts.

2.4. Montrer qu'un espace topologique de Hausdorff et localement compact ou un espace métrique complet, tout sous-espace non vide, fermé et dénombrable contient au moins un point isolé.

2.5. Soient V_1, V_2 deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $L(V_1, V_2)$ l'espace des applications linéaires de V_1 vers V_2.
Décrire la topologie et la structure différentiable de cet espace.

2.6. Montrer que les cartes de la sphère et de l'espace projectif exhibées dans le cours précédent forment une structure différentiable. Faire de même pour le produit de deux variétés différentiables et donc donner la structure différentiable du tore.

2.7. Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement dénombrable d'ouverts $\{\mathcal{U}_\rangle\}$. Supposer que chaque $\mathcal{U}_i$ est à base dénombrable d'ouvert pour la topologie relative.
Montrer qu'alors X est à base dénombrable d'ouverts.

2.8. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de l'espace vectoriel V. Montrer que les ensembles

$$\{\mathcal{U}_{Q_j} | Q_j \text{ sont les sous-espaces engendrés par } J \subset \{e_1, ..., e_n\}, |J| = n - k\}$$

recouvrent $G_k(V)$.

2.9. Montrer que toute paire d'élément de $G_k(V)$ est dans la carte (ϕ, Q) pour un sous-espace $Q \subset V$ de dimension $n - k$.