EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Corrigé**
Corrigé 1	15 septembre 2020

1.1. (a) Soit X un espace topologique à base dénombrable d'ouverts et $Y \subset X$. La topologie de sous espace sur Y consiste en l'ensemble des intersections d'ouverts de X avec Y. Donc si la base de topologie de X est dénombrable, la base de topologie de Y est au plus dénombrable.

(b) Sous l'hypothèse que X est Hausdorff, soient $x, y \in Y$. Comme $Y \subset X$, il existe deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ contenant x et y respectivement tels que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. En inetersectant ces ouverts avec Y, on trouve deux ouverts de la topologie de sous espace de Y qui séparent x et y.

1.2.

- Il suffit de prendre les ouverts de la topologie produit, qui sont les produits d'ouverts d'espaces à base dénombrable d'ouvert, or en faisant le produit cartésien, la cardinalité ne change pas.
- Soient X et Y deux espaces de Hausdorff. Soient $(x, y), (x', y') \in X \times Y$. Alors il existe $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ séparant x et x' dans X et $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ séparant y et y' dans Y. En prenant $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ et $\mathcal{U}' \times \mathcal{V}'$, on a deux ouverts qui séparent (x, y)e et (x', y') dans $X \times Y$.
- Par les deux points précédents et la construction de cartes donnée au cours, nous avons le résultat.

1.3.

- Soit (x_n) une suite convergente vers x. Si $y \neq x$, soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des voisinages de x et y disjoints. Comme $\mathcal{U}$ contient x_n pour tout n sauf un nombre fini, $\mathcal{V}$ ne peut pas satifaire cette condition, donc (x_n) ne peut pas converger vers y.
- Il suffit de montrer que tout singleton $\{x_0\}$ est fermé. Si x est un point de X différent de $\{x_0\}$, alors il existe $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux voisinages disjoints de x et x_0. Comme $\mathcal{V}$ n'intersecte pas $\{x_0\}$, le point x ne peut pas etre dans l'adhérence de $\{x_0\}$. Donc l'adhérence de $\{x_0\}$ est $\{x_0\}$, ce qui implique qu'il est fermé.

1.4. Soit $\{B_n\}$ une base dénombrable d'ouverts de X.
Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout entier n, choisir $A_n \in \mathcal{A}$ contenant un élémant B_n de la base de topologie. La collection $\mathcal{A}'$ formée des ensembles A_n est dénombrable. De plus elle est un recouvrement de X: Soit $x \in X$, on peut choisir $A \in \mathcal{A}$ qui contient x. Comme A est ouvert, il existe un élément $\{B_n\}$ de la base de topologie tel que $x \in B_n \subset A$. On a donc un A_n qui est défini et qui contient x. Ce qui prouve que $\mathcal{A}$ admet un sous recouvrement dénombrable.

1.5. Montrons tout d'abourd qu un espace métrique séparable est à base dénombrable d'ouverts. Soit $\mathcal{Q}$ une partie dense dénombrable dans X, alors la collection $\mathcal{B} = \{B(q, \frac{1}{n}) | q \in \mathcal{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et est clairement une base de topologie pour X.
Montrons la réciproque: Soit (X, d) un espace métrique et $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Pour chaque $B \in \mathcal{B}$ on choisi un élément b_B de B. On a ainsi un sous ensemble déonmbrable $\mathcal{Q} = \{b_B | B \in \mathcal{B}\}$. Montrons qu'il est dense. Comme $\mathcal{B}$ est une base, pour chaque ouvert $\mathcal{U}$ de X et pour chaque $x \in \mathcal{U}$, il existe $B \subset \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset \mathcal{U}$. En particulier, pour chaque x et chaque n, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset B(x, \frac{1}{n})$. Donc $d(x, b_B) \leq \frac{1}{n}$, ce qui implique que $\mathcal{Q}$ est dense.

1.6. Cet espace est localement Euclidien, à base dénombrable d'ouverts, mais pas Hausdorff. Il est impossible de trouver deux ouverts qui séparent $(0, a)$ et $(0, b)$.