EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Exercices**
Série 3	29 septembre 2020

3.1. Montrer que la fonction $f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$ est lisse sur $\mathbb{R}$.

3.2. Soit $\{B_1, B_2, ..., B_n, ..\}$ une collection localement finie d'espaces topologiques. Montrer que $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, ..., \bar{B}_n, ..\}$ est localement finie.

3.3. Si $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et K est un compact de M, alors il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ à support compact telle que $f|_K = g$.

3.4. On définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par:

$$n.(x, y) = (x + n, (-1)^n y).$$

(a) Montrer que cette action est libre, propre et agit par difféomorphismes. On note $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ la variété quotient.

(b) Montrer que la projection $\pi_1(x, y) = x$ du plan sur sa première coordonnée passe au quotient en une application différentiable $\pi : M \to \mathbb{S}^1$ de la variété dans le cercle.

(c) Se convaincre que M est difféomorphe au ruban de Möbius.

3.5. L'objet de cet exercice est de trouver un exemple explicite d'atlas pour la sphére. Considérons la sphére $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_i x_i^2 = 1\}$. Fixons $e_n + 1 = (0, ..., 0, 1)$, on note E_x le plan orthogonal à x, passant par l'origine. En considérant les droites passant par e_{n+1}, définir une application $\phi_{e_{n+1}}$ de $\mathbb{S}^n \backslash e_{n+1}$ dans $E_{e_{n+1}} = \mathbb{R}^n$ et la dessiner. Montrer que $\phi_{e_{n+1}}$ est un homéomorphisme, en précisant entre quels ensembles. En déduire un atlas de $\mathbb{S}^n$. L'application $\phi_{e_{n+1}}$ est appelée projection stéréographique.

3.6. Soit M un espace topologique Hausdorff localement Euclidien. Montrer que M est à base dénombrable d'ouverts si et seulement si il est paracompact et a un nombre dénombrable de composantes connexes.
Indication: En supposant M paracompact, montrer que chaque composante connexe a un recouvrement localement fini d'ouverts de coordonnées précompacts et en extraire un sous recouvrement dénombrable.