4.1. Soient M^m et N^n deux variétés différentiables de classe C^∞.
Rappelons qu'une fonction f est de classe C^k si pour toute carte (U, ϕ) de M^m et toute carte (V, ψ) de N^n, l'application

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

est de classe C^k.

Montrer qu'une application continue $f : M^m \to N^n$ est de classe C^k si et seulement si le pullback de chaque fonction C^k sur N^n est C^k: $f^*(C^k(N^n)) \subset C^k(M^m)$.

4.2. On se place dans le cas $M = \mathbb{R}^n$, et on choisit un ouvert $V \subset M$. Expliciter une bijection naturelle entre TV et $V \times \mathbb{R}^n$.

4.3. Soit M une variété non vide de dimension $n \geq 1$. Montrer que l'espace vectoriel $C^\infty(M)$ est de dimension infinie.

4.4. Nous allons utiliser les partitions de l'unité pour construire des fonctions particulières.
Soit M un espace topologique. Une fonction d'exhaustion pour M est une fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$ telle que les ensembles $f^{-1}(] - \infty, c])$, appelés ensembles de sous niveaux, soient compacts pour tout $c \in \mathbb{R}$. Le nom provient du fait que lorsque $n \in \mathbb{N}$, les ensembles de sous niveaux forment une exhaustion de M. Par exemples les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ données par $f(x) = |x|^2$ et $g(x) = \frac{1}{1-|x|^2}$ sont des fonctions d'exhaustion lisses. Evidemment si M est compact, n'importe quelle fontion continues est une fonction d'exhaustion.

Montrer que n'importe quelle variété lisse admet une fonction d'exhaustion lisse et positive.

4.5. Soit M une variété lisse et $A \subset M$ un sous ensemble fermé et $f : A \to \mathbb{R}^k$ une fonction lisse. Montrer que pour n'importe quel ouvert U contenant A il existe une fonction lisse $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^k$ telle que $\tilde{f}\big|_A = f$ et $supp(\tilde{f}) \subset U$.

4.6. Montrer que l'ensemble des dérivations forme un espace vectoriel.

4.7. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $w \in T_a\mathbb{R}^n$ et $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

- Si f est contante alors $w(f) = 0$.
- Si $f(a) = g(a) = 0$, alors $w(fg) = 0$