EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Corrigé**
Corrigé 2	22 septembre 2020

2.1. Soit X un espace topologique de Hausdorff localement compact, alors chaque point de X est contenu dans un voisinage compact, donc pre compact.
Si chaque point de X est contenu dans un voisinage pre compact, alors X admet trivialement une base d'ouvert pre compacts.
Supposer que X est Hausdorff et admet une base d'ouverts pre compacts. Alors pour chaque x on trouve un ouvert U pre compact de X contenant x. En prenant l'adhérence de U on obtient un compact contenant x.

2.2. Ce résultat est obtenu par définition de la topologie de sous-espace.

2.3. Soit X un tel espace. Comme X est un espace de Hausdorff locallement compact, il admet une base d'ouverts précompacts. Comme il est à base dénombrable d'ouverts, il est recouvert par un nombre dénombrable de tels ensembles. Appelons cette collection $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Soit $K_1 = \bar{U_1}$ et supposer par induction qu'on a construit une suite $K_1, K_2, ..., K_k$ telle que $U_j \subset K_j$ et $K_{j-1} \subset int(K_j)$. Comme K_k est compact, il existe m_k tel que $K_k \subset U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_{m_k}$. En prenant $K_{k+1} = \bar{U_1} \cup \bar{U_2} \cup ... \cup \bar{U_{m_k}}$, K_{k+1} est un compact dont l'interieur contient K_k. De plus en choisissant $m_k > k+1$ on obtient l'exhaustion par récurrence.

2.4. Soit X un tel espace.Soi $A \subset X$ un sous-espace non vide, dénmbrable et fermé, et supposer que A n'a aucun point isolé. Comme A est fermé dans X, on a que A est aussi un espace métrique complet ou un espace de Hausdorff localement compact. Pour tout $a \in A$, le singleton $\{a\}$ est nulle part dense dans A: il est fermé dans A car A est Hausdorff et il ne contient aucun sous ensemble ouvert non vide car A n'a pas de points isolés. Comme A est une union dénombrable de singletons, le théorème de Baire implique que A a un intérieur vide dans A, ce qui est un contradiction.

2.5. Si V_1 est de dimension n et V_2 est de dimension m, on se rappelle que $L(V_1, V_2)$ est un espace vectoriel de dimension nm, donc en prenant une base de V_1 et une base de V_2 et en considérant les matrices des applications linéaires entre ces espaces, on obtient des matrices $n \times m$. Ces matrices peuvent être vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^{nm}$, qui est évidemment une variété.

2.6. Dans les 3 cas, chaque carte est un homéomorphisme et a été exhibé de façon explicite. Il suffit donc d'en calculer l'inverse puis de la composer avec une autre carte, puis de constater que le changement de carte est lisse.

2.7. Soit $\}U_i\}$ un recouvrement ouvert dénombrable de X. On a que la topologie relative de chaque U_i est à base dénombrable d'ouverts. C'est à dire qu'il existe une base de topologie $\mathcal{B}_i = \{B_j\}$ dénombrable telle que $U_j = \bigcup_j B_j$ et pour tout ouvert $V \subset X$, $V \cap U_i = \bigcup_{j_k} B_{j_k}$.
Soit U un ouvert de X, alors $U = \cup_{i_m} U_{i_m} = \cup_{i_m} \cup_l B_l^{i_m}$ où $\{B_l^{i_m}\}$ recouvrent U_{i_m}. Ceci est une union dénombrable. Les ouverts de la topologie relative d'un ouvert étant des ouverts de X, on obtient bien que la collection de tous les $\mathcal{B}_i$ forme une base dénombrable d'ouverts de X.

2.8. Soit $P \in G_k(V)$,c'est à dire P est un sous-espace vectoriel de V de dimension k. Considérer Q le complément orthogonal de P dans V, alors $P \oplus Q = V$ et Q est de dimension $n-k$. De plus on constate que $P \cap Q = \{0\}$, donc $P \in \mathcal{U}_Q$, ce qui montre le résultat.

2.9. Montrer que toute paire d'élément de $G_k(V)$ est dans la carte (ϕ, Q) pour un sous-espace $Q \subset V$ de dimension $n-k$.