EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Exercices**
Série 4	06 octobre 2020

4.1. Prouver que l'espace des dérivations forme un espace vectoriel.

4.2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $w \in T_a\mathbb{R}^n$ et $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

- Si f est contante alors $w(f) = 0$.
- Si $f(a) = g(a) = 0$, alors $w(fg) = 0$

4.3. Soient M, N, P des variétés lisses. Soient

$$F : M \to N \text{ et } G : N \to P$$

des applications lisses avec $p \in M$, $q = F(p) \in N$ et $r = G(q) \in P$.
Montrer les points suivants:

- $d_pF : T_pM \to T_qN$ est linéraire.
- $d_p(G \circ F) = d_pF \circ d_qG : T_pM \to T_rP$ (règle de dérivation en chaine ou "chain rule"). Et vérifier que pour des applications lisses de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on retrouve bien la règle de "dérivée d'une composition de fonctions" traditionelle.
- Si F est un difféomorphisme, alors d_pF est un isomorphisme entre T_pM et T_qN et $d_pF^{-1} = (d_pF)^{-1}$.

4.4. Soient $M_1, ..., M_k$ des variétés lisses et pour chaque j, soit $\pi_j : M_1 \times ... \times M_k \to M_j$ la projection canonique.
Pour tout $p = (p_1, ..., p_k) \in M_1 \times ... \times M_k$, on a l'application

$$\alpha : T_p(M_1 \times ... \times M_k) \to T_{p_1}M_1 \oplus ... \oplus T_{p_k}M_k$$

définie par

$$\alpha(v) = (d_p\pi_1(v), ..., d_p\pi_k(v)).$$

Montrer que α est un isomorphisme.

4.5. Définition alternative d'espace tangent:

Soit M une variété différentiable et $\gamma_1 : I_1 \to M$, $\gamma_2 : I_2 \to M$ deux courbes lisses et telle que 0 appartienne à I_1 et I_2. On suppose que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. On définit la relation d'équivalence suivante:

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ si et seulement si pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on a $\frac{d}{dt}\big|_0(f \circ \gamma_1) = \frac{d}{dt}\big|_0(f \circ \gamma_2)$.

On définit T_pM comme étant l'ensemble des classes d'équivalence de courbes passant par p pour cette relation.
Montrer que cette définition d'espace tangent coincide avec celle vue en cours.
(*Indication*: Considérer l'application $\Phi([\gamma]_\sim) := \gamma'(0)$.)