6.1. Soient (U, ϕ) et (U, ψ) deux cartes de coordonées sur une variété différentiable M. Si les premières fonctions de coordonnées ϕ_1 et ψ_1 coincident sur U, ceci n'implique *pas* que $\frac{\partial}{\partial \phi_1}\big|_p$ et $\frac{\partial}{\partial \psi_1}\big|_p$ coincident sur U.
Trouver un exemple de ceci, en prenant $\mathbb{R}^2$ et les coordonnées cartésiennes (x, y) et la carte (u, v) satisfaisant $u = x$ et $v = x + y$.
Ceci montre que $\frac{\partial}{\partial \phi_1}\big|_p$ *dépend de* $(\phi_1, ..., \phi_n)$ *et pas seulement de* ϕ_1.

6.2. Soit V un espace vectoriel de dimension n.

- Soit $\{b_1, ..., b_n\}$ une base de V et soit $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ donnée par $\phi(\sum_{i=1}^n x_i b_i) = (x_1, ..., x_n)$. On suppose que la topologie sur V fait de ϕ un homéomorphisme et la structure différentiable sur V est donnée par cette seule carte. Montrer que la topologie sur V et la stucture différentiable sont indépendants du chois de la base.
- Soit $a \in V$ fixé. On associe la courbe $\gamma_v(t) := a + tv$.
Montrer que l'application $\Phi_a : V \to T_a V$ $\Phi_a(v) = \dot{\gamma_v}(0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Soit $F : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels V et W. En identifiant $V = T_a V$ et $W = T_{F(a)} W$ via l'isomorphisme de la question précédente, à quelle application $F_\star$ correspond-elle?

6.3. Considérer la fonction déterminant

$$det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

Vérifier que c'est une application différentiable. Nous voulons calculer la différentielle de *det* au point $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$det_\star|_A : T_A GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \to T_{det(A)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

- Montrer que $det_\star|_I B = Tr(B)$.
- Montrer que pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$det_\star|_A B = det(A)(Tr(A^{-1}B)).$$