EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Exercices**
Série 3	29 septembre 2020

3.1. Cette fonction est lisse sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par composition, il suffit donc de montrer qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ en 0. Comme l'existence d'une $(k+1)$ dérivée umplique la continuité de la k ème dérivée, il suffit de montrer que telle dérivée existe. On commence par remarquer que f est continue en 0 car $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$. En fait, une application de la règle de l'Hospital montre que pour tout $k \geq 0$ on a

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^k} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{-k}}{e^{-\frac{1}{t}}} = 0.$$

On montre ensuite par induction que pour $t > 0$, la $k$ème dérivée de f est de la forme:

$$f^{(k)}(t) = p_k(t)\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2k}}$$

pour un polynome p_k de degré au plus k. C'est évident pour $k = 0$. Supposer que ce soit vrai pour $k \geq 0$. Par la dérivée d'un produit, on obtient

$$f^{(k+1)}(t) = (t^2p_k'(t) + p_k(t) - 2ktp_k(t))\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(k+1)}}$$

qui est bien de la forme requise.
Finallement on montre par induction que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k. Pour $k = 0$ c'est évident par définition de f. Pour montrer que $f^{(k+1)}(0)$ existe, il faut montrer que $f^{(k)}$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et que ces dérivées coincident. Clairement la dérivée à gauche vaut 0. Pour la dérivée à droite, on a

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p_k(t)\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2k}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0^+} p_k(t)\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2k+1}} = 0$$

ce qui prouve le résultat.

3.2. Comme $\{B_1, B_2, ..., B_n, ..\}$ est localement finie, on a que tout ouvert U intersecte au plus un nombre fini de B_k. Si un ouvert intersectait un nombre infini de $\bar{B_k}$, alors il intersecterait un nombre infini de B_k par définition de l'adhérence d'un ensemble.

3.3. Il suffit de prendre une fonction plateau sur K, c'est à dire une fonction $\phi : M \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\phi|_K = 1$ et $\phi = 0$ sur le complémentaire d'un ouvert contenant K. En prenant $f(x) = g(x)\phi(x)$, on a la fonction désirée.

3.4. On définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par:

$$n.(x, y) = (x + n, (-1)^n y).$$

(a) Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n(x, y) = (x, y)$ pour un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $(x+n, (-1)^n y) = (x, y)$, ce qui force $n = 0$, donc l'action est libre.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ alors en particulier K est borné.En conséquence, pour n assez grand, $K \cap nK = \emptyset$. Ceci signifie que $\{n \in \mathbb{Z} | nK \cap K \neq \emptyset\}$ est borné et donc compact puisque $\mathbb{Z}$ est discret. Par ailleurs, il est clair que chaque $(x, y) \mapsto n(x, y)$ est un difféomorphisme. Ainsi, $\mathbb{Z}$ agit librement et proprement sur $\mathbb{R}^2$ par difféomorphisme par l'acttion indiquée.

(b) Il suffit de voir que si (x, y) et (x_0, y_0) sont dans une même orbite de l'action de groupe, alors $\pi_1(x, y) = \pi_1(x_0, y_0)$. On peut alors poser $\pi([(x, y)]) = \pi_1(x, y)$.

3.5. Posons $U_1 = S^n \backslash \{e_{n+1}\}$, et $\phi_1 : U_1 \to E_{e_{n+1}}$ définie comme suit : pour $x \in U_1$, l'image $\phi(x)$ est le point $D_{xe_{n+1}} \cap E_{e_{n+1}}$, oú $D_{xe_{n+1}}$ est la droite passant par x et e_{n+1}, ce qui définit bien une bijection. A l'aide du théoréme de Thalès, on montre facilement que

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, ..., x_n, 0).$$

Cette application est un produit cartésien de fonctions rationnelles, elle est donc continue. Il nous faut montrer que son inverse est continue. Calculons donc l'inverse de ϕ_1 : soit $u \in E_{e_{n+1}}$. On a

$$u = (u_1, ..., u_n, 0) = \phi_1(x) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, ..., x_n, 0).$$

Ainsi on en déduit

$$(1 - x_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1 + x_{n+1}.$$

De plus,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x_{n+1}^2 = 1$$

et donc

$$(1 - x_{n+1})(1 + x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

De ces deux résultats, on tire

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \frac{(1 - x_{n+1})(1 + x_{n+1})}{(1 - x_{n+1})^2} = \frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}.$$

On en déduit

$$(1 - x_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1 + x_{n+1}$$

ce qui aboutit au final à

$$x_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i^2 - 1)}{\sum_{i=1}^{n}(u_i^2 + 1)}.$$

Ceci suffit pour trouver la forme de ϕ_1^{-1}:

$$\phi_1^{-1}(u) = \frac{2}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}(u_1, ..., u_n, \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 1}{2}.$$

De nouveau on est en présence de fonctions rationnelles, on a donc la continuité. Ainsi, ϕ_1 est bien un homéomorphisme, ce qui assure que $(U1, \phi_1)$ est une carte locale. En prenant un point différent de e_{n+1}, par exemple e_1 ou $-e_{n+1}$, on recouvre la sphère et on a ainsi construit un atlas. Une structure différentiable est obtenue par maximalisation de celui-ci

3.6. Soit M un espace topologique Hausdorff locallement Euclidien. Montrer que M est à base dénombrable d'ouverts si et seulement si il est paracompact et a un nombre dénombrable de composantes connexes.
Indication: En supposant M paracompact, montrer que chaque composante connexe a un recouvrement locallement fini d'ouverts de coordonnées précompacts et en extraire un sous recouvrement dénombrable.