M2.L1 : Série d'exercices sur l'échantillonnage de signaux

Rappel de trigonométrie

Soient *a, b ,u, v* des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

2 sin(u) sin(v) = cos(u - v) – cos(u + v)	$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2 cos(u) sin(v) = sin(u + v) – sin (u - v)	$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
cos(b) – cos(a) = 2 sin((a + b)/2) sin((a - b)/2)	$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
sin(b) – sin(a) = 2 cos((a + b)/2) sin((b - a)/2)	$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

On rappelle également que $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-a) = -\sin(a)$.

1 Signaux périodiques et apériodiques

Un signal $X(t)$ est dit *périodique de période* $T > 0$ si $X(t) = X(t + T)$ pour tout $t \in$ R (exemple : une sinusoïde pure de fréquence $f = 1/T$ est périodique de période T). Remarquer qu'on a alors également $X(t + kT) = X(t)$ pour tous $k \in$ Z et $t \in$ R.

a) Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques de même période T. Est-ce que le signal $X_1(t)$+ $X_2(t)$ est périodique? Si oui, avec quelle est période?

b) Soient encore $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes T_1 et T_2, respectivement. Est-il toujours vrai que la somme $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? (une justification formelle ne vous est pas demandée ici).

Indication : Pour avoir une meilleure idée de ce qui peut se passer, on peut chercher la réponse de manière numérique en représentant différents signaux sur www.wolframalpha.com. Ça se fait tout seul! Essayez par exemple simplement de rentrer ces deux formules sur le site : "sin(2 pi t) + cos(4 pi t)" et "sin(2 pi t) + cos(4 t)" *NB :* Cette indication est également valable pour les deux questions suivantes!

c) Un cas particulier : si T_1 et T_2 sont des nombres entiers, est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? Si oui, avec quelle période?

d) Un autre cas particulier : une note produite par un instrument de musique est composée d'une sinusoïde avec une fréquence fondamentale f_0 et d'autres sinusoïdes, appelées les *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de f_0. La note est donc un signal de la forme :

$$N(t) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(2\pi n f_0 t),$$

où le coefficient $a_n > 0$ est l'amplitude de la n^e harmonique (ce sont ces coefficients qui déterminent le *timbre* de l'instrument). Est-ce que ce signal est périodique? Si oui, avec quelle période?

2 Fréquence d'échantillonnage

Soient $f_1 > f_2 > 0$ deux fréquences données. À quelle fréquence f_e minimum doit-on échantillonner le signal de manière à garantir une reconstruction parfaite au moyen de la formule d'interpolation?

a) $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$

b) $X_2(t) = 2\cos(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)$

c) $X_3(t) = \sin(4\pi f_1 t) + \sin(2\pi(f_1 + f_2)t)$

d) $X_4(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$

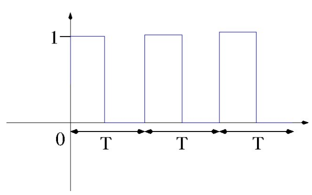
e) $X_5(t) = \cos(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$

3 Interlude musical

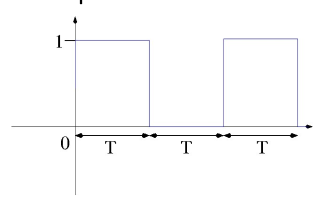
A un concert de musique, on veut enregistrer une chanson qui dure 3 :30 minutes à l'aide d'un micro qui échantillonne le son à une fréquence de 44 kHz, et chaque échantillon est quantifié sur 32 bits. Quelle est la taille du fichier audio résultant (si on ignore ici toute autre forme de compression)?

4 Filtre à moyenne mobile

a) Comment les signaux suivants sont-ils transformés après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$? Pas besoin ici de formules mathématiques : des dessins suffiront!



$X_1(t)$



$X_2(t)$

b) Qu'arrive-t-il à un signal périodique de période T (cf. exercice 1) après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de même période $T_c = T$?