EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Série**
Série 8	03 Novembre 2020

Soit $F : M \to N$ une application lisse.On dit que $p \in M$ est un point régulier pour F si $F_\star : T_pM \to T_{F(p)}N$ est surjective. Un point qui n'est pas régulier est dit point critique. Un point $q \in N$ est appelé valeur régulière si tout $p \in F^{-1}(q)$ est un point régulier. Dans ce cas, $F^{-1}(q)$ est appelé un ensemble de niveaux régulier.

8.1. Montrer que tous les ensembles de niveaux régulier d'une application lisse $F : M \to N$ sont des sous variétés plongées dont la codimension est égale à la dimension de N.

8.2. Montrer que $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par $\gamma(t) = (\sin(2t), \cos(t))$ n'est pas un plongement mais une immersion injective.

8.3. Soit M une variété lisse et $X : M \to TM$ un champ de vecteurs. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

- X est lisse
- Les composantes de X sont lisse, par rapport à chaque cartes d'un atlas de M.
- Pour toute fonction lisse $f : U \to \mathbb{R}$ sur un ouvert $U \subset M$, la fonction $Xf : U \to \mathbb{R}$ définie par $Xf(p) = X_p(f)$ est lisse.

8.4.
- Soient $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Soient aussi les fonctions suivantes$f(x, y) = x$ et $g(x, y) = y$. Montrer que XY n'est pas une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(R)^2$.
- Soient M une variété différentiable et X, Y deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur M. Montrer que l'application

  $$[X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R} \text{ définie par } [X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

  est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur M. Cet opérateur différentiel s'appelle "le crochet de Lie de X et Y".
- Si dans un système de coordonnées, $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, calculer la valeur de $[X, Y]$ dans ce système de coordonnées.
- Déduire du point précédent que

  $$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

  pour tout champ de vecteurs de coordonnées.
- Montrer les propriétés suivantes du crochet de Lie:
  - Bilinéarité: pour $a, b \in \mathbb{R}$, $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ et $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$.
  - Antisymétrie: $[X, Y] = -[Y, X]$
  - Identité de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
  - Pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

    $$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y + (gYf)X.$$
- Calculer quelques exemples de crochets de Lie.

8.5. Montrer qu'il existe un champ de vecteur lisse sur $\mathbb{S}^2$ qui s'annule en exactement un point.