9.1. Soit $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ où le cercle est muni de sa structure différentiable habituelle et le tore est muni de la structure différentiable produit.

- Montrer que l'application $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$F(e^{i\phi}, e^{i\theta}) = ((2 + \cos(\phi))\cos(\theta), (2 + \cos(\theta))\sin(\phi), \sin(phi))$$

  est un plongement lisse. En conclure que $F(\mathbb{T}^2)$ est une sous variété plongée de $\mathbb{R}^3$.

- Montrer qu'on peut écrire $S = F(\mathbb{T}^2)$ comme un ensemble de sous-niveau de la fonction suivante: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y, z) = (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2.$$

  Utiliser le théorème du rang constant pour donner une preuve alternative que S est une sous variété plongée dans $\mathbb{R}^3$.

9.2. Soit $F : M \to N$ une immersion injective entre deux variétés différentiables M et N. Supposer que M est compacte et montrer qu'alors F est un plongement lisse.

9.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$.

- Quelles sont les valeurs régulières de f? Pour quel $c \in \mathbb{R}$ les ensembles de niveaux $f^{-1}(c)$ sont des sous variétés plongées de $\mathbb{R}^2$?
- Dans le cas où $S = f^{-1}(c)$ est une sous variété plongée, pour $p \in S$, trouver l'équation de l'espace tangent T_pS.

9.4. Soient M, N deux variétés différentiables et $\sigma : N \to M$ un plongement lisse. Montrer que σ est un difféomorphisme sur son image, munie de la structure différentiable habituelle.

9.5. Soit $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$ et $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$

- Montrer que ni S, ni C ne sont des sous variétés plongées, munies de la structure différentiable habituelle.
- Est ce qu'il existe une topologie, ou structure différentiable qui fasse des ces ensembles des sous variétés immergées?