5.1. Soient v, w deux dérivations sur une variété lisse M et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda v + \mu w$ est une dérivation.
En effet, si v et w sont linéaires sur $\mathcal{C}^\infty(M)$, alors $\lambda v + \mu w$ reste linéaire sur les fonctions.
La règle de Leibnitz demande quelques calculs:
Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned}(\lambda v + \mu w)(fg) &= \lambda v(fg) + \mu w(fg)\\ &= \lambda v(f)g(p) + \lambda f(p)v(g) + \mu w(f)g(p) + \mu f(p)w(g)\\ &= (\lambda v(f) + \mu w(f))g(p) + f(p)(\lambda v(g) + \mu v(g))\\ &= (\lambda v + \mu w)(f)g(p) + f(p)(\lambda v + \mu w).\end{aligned}$$

De plus, on remarque que l'identité est la dérivation nulle, c'est à dire $v_0(f) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

5.2.
- Sans perdre de généralité, par $\mathbb{R}$ linéarité des dérivations, soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la fonction identiquement 1, et montrons que $v(f) = 0$ pour toute dérivation.
$$v(1) = v(1.1) = v(1)1 + 1v(1) = 2v(1).$$
Ceci force $v(1) = 0$.
- Ce point est direct par la règle de Leibnitz.

5.3.
- Soient $v, w \in T_pM$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, alors
$$d_pF(\lambda v+\mu w)(f) = (\lambda v+\mu w)(f\circ F) = \lambda v(f\circ F)+\mu w(f\circ F) = \lambda d_pF(v)(f)+\mu d_pF(w)(f).$$
Ceci montre que d_pF est linéaire.
- Soient $v \in T_pM$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(P)$
$$d_p(G\circ F)(v)(f) = v(f\circ G\circ F) = d_pF(v)(f\circ G) = d_{F(p)}(d_pF(v))(f) = (d_{F(p)}G\circ d_pF)(v)(f).$$
- On utilise la règle de dérivation en chaine:
$$d_pF \circ d_{F(p)}F^{-1} = d_p(F\circ F^{-1}) = d_p(Id_M) = Id_{T_pM}$$
de même
$$d_{F(p)}F^{-1} \circ d_pF = d_{F(p)}(F^{-1}\circ F) = d_p(Id_N) = Id_{T_pN}.$$
Donc $(d_pF)^{-1} = d_{F(p)}F^{-1}$.

5.4. Premièrement, α est clairement linéaire. Par le fait que les dimensions des deux espaces sont les mêmes, il suffit de montrer que α est injective, on aura alors que c'est un isomorphisme.
Soit $v \in T_p(M_1 \times ... \times M_k)$ tel que $\alpha(v) = 0$, c'est à dire que $d_p\pi_j(v) = 0$ pour tout j. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M_j)$, alors $d_p\pi_j(v)(f) = 0$. On a $d_p\pi_j(v) = v(f\circ\pi_j) = 0$. En écrivant cette équation en coordonnées, on obtient que les coefficients de v sont tous nuls, ce qui implique $v = 0$ et donc α est injective.

5.5. Définition alternative d'espace tangent:

On a que Φ est bien définie et injective, car γ, η sont deux courbes telles que $[\gamma] = [\eta]$ si et seulement si pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on a $\frac{d}{dt}|_0(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt}|_0(f \circ \eta)$, donc $\dot{\gamma}(0) = \dot{\eta}(0)$.
De plus, étant donné $v \in T_pM$ on peut poser l'équation différentielle suivante: $v_p = \dot{\gamma}(0)$, qui, par la théorie des équations différentielles, admet une solution locale, on a donc une courbe γ telle que $\Phi([\gamma]) = \dot{\gamma}(0)$.