| | |
|---|---|
| EPFL - Automne 2020 | Y. Lodha, G. Buro |
| **Smooth Manifolds** | **Exercices** |
| Série 4 | 06 octobre 2020 |

**4.1**. Supposons tout d'abord que $f : M^m \to N^n$ est $\mathcal{C}^k$, et montrons que pour $\phi : U \to \phi(U)$ une carte locale de $N^n$, et $\psi : V \to \psi(V)$ une carte locale de $M$, alors $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$est lisse. Si l'on note $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n) = (x_1 \circ \psi, ..., x_n \circ \psi)$ où $x_1, ..., x_n$ sont les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$, la fonction $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ est différentiable si, et seulement si chaque $\psi_i \circ F \circ \phi^{-1}$ est différentiable. Or $\psi_i : V \to \mathbb{R}$ est lisse et ainsi par hypothèse $\psi_i \circ f$ est lisse. On en déduit maintenant que $\psi_i \circ f \circ \phi^{-1}$ est lisse par la première remarque.

Montrons maintenant que si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est lisse pour toutes cartes locales $(U, \phi)$ et $(V, \psi)$ alors $f^\star(\mathcal{C}^\infty(N) \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(N^n)$ une fonction lisse sur $N^n$. Il faut voir que $f^\star g = g \circ f$ est lisse, c'est-à-dire que pour toute carte locale $(U, \phi)$ de $N^n$ la fonction $(g \circ f) \circ \phi^{-1}$ est lisse. Or, $g$ est lisse, donc pour toute carte $(V, \psi)$ de $N^n$, $g \circ \psi^{-1}$ est lisse. Or

$$g \circ f \circ \phi^{-1} = g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

qui est lisse, car la composition de fonctions lisse est lisse.

**4.2**. Soit $\Phi : V \times \mathbb{R}^n \to TV$ donnée par $\Phi(p, v)(f) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p) - f(p + hv)}{h}$. C'est bien la bijection désirée.

**4.3**. Par l'existence de fonctions plateau. Des fonctions plateau sur des compacts différents ne peuvent pas être combinaison linéaire les unes des autres.

**4.4**. Voir Lee p.46

**4.5**. Voir Lee p.45

**4.6**. Soient $v, w$ deux dérivations sur une variété lisse $M$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda v + \mu w$ est une dérivation.
En effet, si $v$ et $w$ sont linéaires sur $\mathcal{C}^\infty(M)$, alors $\lambda v + \mu w$ reste linéaire sur les fonctions.
La règle de Leibnitz demande quelques calculs:
Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned}
(\lambda v + \mu w)(fg) &= \lambda v(fg) + \mu w(fg) \\
&= \lambda v(f)g(p) + \lambda f(p)v(g) + \mu w(f)g(p) + \mu f(p)w(g) \\
&= (\lambda v(f) + \mu w(f))g(p) + f(p)(\lambda v(g) + \mu v(g)) \\
&= (\lambda v + \mu w)(f)g(p) + f(p)(\lambda v + \mu w).
\end{aligned}$$

De plus, on remarque que l'identité est la dérivation nulle, c'est à dire $v_0(f) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

**4.7**.

- Sans perdre de généralité, par $\mathbb{R}$ linéarité des dérivations, soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la fonction identiquement 1, et montrons que $v(f) = 0$ pour toute dérivation.

  $$v(1) = v(1.1) = v(1)1 + 1v(1) = 2v(1).$$

  Ceci force $v(1) = 0$.
- Ce point est direct par la règle de Leibnitz.