EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Série**
série 10	17 novembre 2020

10.1. Soit M une variété de dimension n et $\omega \in \Omega^1(M)$.

- Montrer que pour tout $p \in M$ il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $\omega_p = d_p f$. (Noter que ceci est une égalité seulement pour le covecteur en un point.)
- On dit que ω est exacte si $\omega = df$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Supposer que ω est exacte et montrer que dans un systeme de coordonnées $(U, (x^1, ..., x^n))$, $\omega = \omega_i dx^i$ satisfait

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}.$$

- Utiliser le point précédent pour trouver une forme qui n'est pas exacte. (Ici, la topologie de M est importante, réfléchir à $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.)

10.2. Soit V un espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des $2-$tenseurs covariants sur V est en bijection avec les matrices $n \times n$. Montrer ensuite que l'application déterminant vue comme une fonction sur les matrices $n \times n$ est un $n-$tenseur covariant sur $\mathbb{R}^n$ dont les entrées sont les n rangs de la matrice.

10.3. Montrer qu'un tenseur $T \in \otimes^k V$ est alterné si et seulement si on peut l'écrire sous la forme:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} T_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon^{i_1} \otimes ... \otimes \varepsilon^{i_k}$$

tel que $T_{i_1 \ldots i_k} = \operatorname{sgn}(\sigma) T_{\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_k)}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_k$. On rappelle $\mathcal{S}_k$ est l'enssemble des permutations de $\{1, ..., k\}$ que $\operatorname{sgn}(\sigma)$ est la signature d'une permtation σ.

10.4. Démontrer la formule du déterminant:

$$\varepsilon^I(X_1, ... X_k) = det \begin{pmatrix} X_1^{i_1} & ... & X_k^{i_1} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ X_1^{i_k} & ... & X_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

10.5. Montrer que les

$$\{\varepsilon^I | I = (i_1, ... i_k), 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n\}$$

forme une base de $\Lambda^k V^\star$.