EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Série**
série 11	24 novembre 2020

11.1. Soient (x, y, z) les coordonées standart de $\mathbb{R}^3$ et (v, w) les coordonnées standart de $\mathbb{R}^2$. Soit $\phi(x, y, z) = (x + z, xy)$. On définit $\alpha = e^w dv + vdw$ et $\beta = vdv \wedge dw$ des formes sur $\mathbb{R}^2$. Calculer

- $\alpha \wedge \beta$
- $\phi^\star \alpha$
- $\phi^\star \beta$
- $\phi^\star \alpha \wedge \phi^\star \beta$.

11.2. Calculer la différentielle exterieure des formes suivantes:

- Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.
- Sur $\mathbb{R}^3$, $\phi = \cos(x) dy \wedge dz$.
- Sur $\mathbb{R}^3$, $\omega = Adx + Bdy + Cdz$.

11.3. Montrer que pour $F : M \to N$ une fonction lisse et $\omega \in \Omega^k(N)$ et $\nu \in \Omega^l(N)$, on a

- $F^\star(\omega \wedge \nu) = F^\star \omega \wedge F^\star \nu$
- Dans n'importe quel système de coordonées, on a

$$F^\star\left(\sum_I \omega_I dy^I\right) = \sum_I (\omega_i \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

11.4. Soit M une variété différentiable. Montrer que pour tout $\omega \in \Omega^1(M)$ et tous champs de vecteurs lisse $X, Y \in \Gamma(M)$, on a

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]).$$