6.1. En appliquant la formule de changement de coordonnées pour les vecteurs tangents

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$$

à $(u, v) = (x, x + y)$ on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}.$$

6.2. Soit V un espace vectoriel de dimension n.

- Etant donné que la dimension de V est invariante par changement de base, on peut toujours identifier V avec $\mathbb{R}^n$, peu importe quelle bas on choisi, donc la topologie et la structure différentiable restent les mêmes.
- Soient $v, w \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\dot{\gamma}_{\lambda v+w}(t) = \lambda v + w$. Par conséquent Φ_a est un homomorphisme.
  Pour la surjectivité, on a qu'étant donné $\xi \in T_a V$, le point $\gamma_\xi(t)$ satisfait $\phi(\gamma_\xi(t)) = \xi$. Et pour l'injectivité, soit $v \in V$ tel que $\dot{\gamma}_v(0) = 0$. Alors $a + tv = c$ une constante. Ce qui force $v = 0$.
- Comme $F : V \to W$ est linéaire, on a:

  $$d_pF(v) = \lim_{t\to 0}\frac{F(p + tv) - F(p)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{F(p) + tF(v) - F(p)}{t} = F(v).$$

  La différentielle d'une application linéaire est donc l'application elle même.

6.3. Considérer la fonction déterminant

$$det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

Vérifier que c'est une application différentiable. Nous voulons calculer la différentielle de det au point $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$det_\star|_A : T_A GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \to T_{det(A)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

- On utilise la formule suivante:

  $$\det(I + tB) = 1 + tTr(B) + \mathcal{O}(t^2) \text{ si } t \to 0.$$

  Alors:

  $$det_\star\big|_I(B) = \lim_{t\to 0}\frac{\det(I + tB) - \det(I)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1 + tTr(B) + \mathcal{O}(t^2) - 1}{t} = Tr(B).$$

- Ici on utilise la formule:

$$det(A + tB) = det(A) + Tr(I + tA^-1B)$$

de la même manière pour obtenir

$$det_\star\big|_A(B) = \lim t \to 0 \frac{det(A + tB) - det(A)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{det(A) + det(I + tA^-1B) - det(A)}{t} = det(A)Tr(A^{-1}B).$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé la formule précédente.