EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Série**
Série 8	03 Novembre 2020

Soit $F : M \to N$ une application lisse.On dit que $p \in M$ est un point régulier pour F si $F_\star : T_pM \to T_{F(p)}N$ est surjective. Un point qui n'est pas régulier est dit point critique. Un point $q \in N$ est appelé valeur régulière si tout $p \in F^{-1}(q)$ est un point régulier. Dans ce cas, $F^{-1}(q)$ est appelé un ensemble de niveaux régulier.

8.1. Soit $F : M \to N$ une application lisse et soit $c \in N$ une valeur régulière. L'ensemble U de points $p \in M$ où le rang de $d_pF = dim(N)$ est ouvert dans M et contient $F^{-1}(c)$ car c est une valeur régulière. Il s'en suit que $F|_U : U \to N$ est une submersion lisse et par le théorème du rang constant, on déduit que $F^{-1}(c)$ est une sous variété plongée de U. Comme la composition de plongements reste un plongement, il s'en suit que $F^{-1}(c)$ est une sous variété plongée dans M.

8.2. La correction est faite dans la série précédente.

8.3. Soit M une variété lisse et $X : M \to TM$ un champ de vecteurs.

- Supposer que X est lisse et soient (x^i, v^i) les coordonnées locales sur $\pi^{-1}(U) \subset TM$. associées à la carte $(U, (x^i))$. Par définition des coordonnées, la représentation de $X : M \to TM$ sur U s'écrit $X(x) = (x^1, ..., x^n, X^1(x), ..., X^n(x))$ avec X^i la $i$ème coordonnée de X dans le système de coordonnées. Le fait que X est lisse est donc complètement équivalent au fait que les coordonnées de X sont lisses.
- Les composantes de X sont lisse, par rapport à chaque cartes d'un atlas de M.
- Si pour toute fonction lisse $f : U \to \mathbb{R}$ sur un ouvert $U \subset M$, la fonction $Xf : U \to \mathbb{R}$ définie par $Xf(p) = X_p(f)$ est lisse. En coordonnées, $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et on prend $f = x^i$ et on obtient donc que $X(f) = a^i$ en coordonnées, et donc chaque coordonnée de X est lisse, ce qui implique que X est lisse.
  Ceci est une façon pas complètement formelle de faire, car les fonctions de coordonnées x^i ne sont pas dans $\mathcal{C}^\infty(M)$ mais dans $\mathcal{C}^\infty(U)$ où U est l'ouvert de carte. Il faut donc considérer une fonction plateau η sur U et calculer $X(\eta x^i)$ en utilisant la règle de Leibnitz: $X(\eta x^i) = X(\eta)x^i + \eta X(x^i) = a^i$.
- Le fait que si X est lisse alors $X(f)$ est lisse pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est vrai car la composition d'applications lisses reste lisse.

8.4.

- En appliquant XY à fg on voit directement que la règle de Leibniz n'est pas respectée, et donc XY n'est pas une dérivation.
- On doit montrer que $[X, Y]$ est une dérivation. La linéarité est évidente. Pour la règle de Leibniz, soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, alors:

$$
\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + gX(f)) \\
&= X(f)Y(g) + fX(Y(g)) + X(g)Y(f) + gX(Y(f)) \\
&\quad - Y(f)X(g) - fY(X(g)) - Y(g)X(f) - gY(X(f)) \\
&= fX(Y(g)) + gX(Y(f)) - fY(X(g)) - gY(X(f)) \\
&= f[X, Y](g) + g[X, Y](f)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

- Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on a

$$\begin{aligned}
[X,Y](f) &= a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(b^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) + b^j \frac{\partial}{\partial x^j}(a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}) \\
&= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + a^i b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - b^j a^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \\
&= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} \\
&= \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}
\end{aligned} \tag{2}$$

  d'où

$$[X,Y] = \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

- Par le point précédent, si a^i et b^j sont des constantes, le crochet s'annule.
- Ces trois points sont clairs. Pour l'identité de Jacobi, il faut faire un calcul un petit peu plus long, mais facile.

8.5. Il faut faire le pushforward du champ de coordonnées $\frac{\partial}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$ par la projection stéréographique. Soient (u,v) les coordonnées stéréographiques relatives à la projection selon le pole nord, c'est à dire l'application $\phi_N : \mathbb{S}^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ et $(\bar{u},\bar{v})$ les coordonnées stéréographiques realtives au pole sur, c'est à dire $\phi_S : \mathbb{S}^2 - \{S\} \to \mathbb{R}^2$

Considérer le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial u}$ (en coordonnées), défini sur $\mathbb{S}^2 - \{N\}$. Sur l'intersection des deux cartes, $\mathbb{S}^2 - \{N,S\}$, on peut calculer l'expression de $\frac{\partial}{\partial u}$ dans les coordonnées $(\bar{u},\bar{v})$. On trouve:

$$\frac{\partial}{\partial u} = (\bar{u}^2 - \bar{v}^2)\frac{\partial}{\partial \bar{u}} - 2\bar{u}\bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{v}}$$

On voit qu'avec cette formule, le vamp de vecteurs s'étend facilement au pole nord.

Donc, un camp de vecteurs avec la propriété requise est:

$$X_p = (\phi_N^{-1})_\star(\frac{\partial}{\partial u}) \text{ si } p \in \mathbb{S}^2 - \{N\}.$$

X_p est un camp de vecteurs lisse défini sur toute la sphère et il s'annule au pole nord, mais nulle part ailleurs.