EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Série**
série 10	17 novembre 2020

10.1. Soit M une variété de dimension n et $\omega \in \Omega^1(M)$.

- Montrer que pour tout $p \in M$ il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $\omega_p = d_p f$. (Noter que ceci est une égalité seulement pour le covecteur en un point.)
- Il suffit d'utiliser le théorème de Schwarz en coordonnées: Si $\omega = df$, alors $\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ et donc

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}.$$

- Soit $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$, alors en utilisant le résultat précédent, on remarque que $\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$.

10.2. Il suffit de prendre une base $\{b_1, ..., b_n\}$ de l'espace vectoriel V et d'écrire la matrice de Gram du 2-tenseur. Dans l'autre sens, on prend une matrice quelconque et on l'utilise comme étant la matrice de Gram d'un 2-tenseur.

Pour le déterminant, il faut voir le déterminant comme une application prenant n vecteurs, qui sont les n vecteurs colonne de la matrice. Ensuite les propriétés du déterminant montrent directement que c'est un n tenseur.

10.3. Soit T un k-tenseur alterné, c'est à dire que $T(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma) T(X_1, ..., X_k)$.
On rappelle qu'en coordonnées, $T_{i_1 \dots i_k} = T(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{i_k}})$. Par conséquent

$$T_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_k)} = T(\frac{\partial}{\partial x^{\sigma(i_1)}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{\sigma(i_k)}}) = sgn(\sigma) T_{i_1 \dots i_k}$$

ce qui donne l'équivalence directement.

10.4. Cette formule est directe en appliquant la définition du déterminant.

10.5. On sait que $\{\varepsilon_{i_1} \otimes ... \otimes \varepsilon_{i_k} | 1 \le i_1 < ... < i_k \le n\}$ est une base de l'espace des tenseurs. Or $Alt : Tens^0_k(V) \to \Lambda_k(V)$ (la projection d'un k-tenseur sur les k-formes) est linéaire, surjective, et de plus

$$Alt(\varepsilon_{i_1} \otimes ... \otimes \varepsilon_{i_k}) = \frac{1}{k!} \varepsilon_{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon_{i_k}$$

donc $\{\varepsilon_{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon_{i_k} | 1 \le i_1 < ... < i_k \le n\}$ engendre $\Lambda_k(V)$. Mais la formule du déterminant entraîne que $\alpha = \varepsilon_{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon_{i_k} = 0$ si les i_j ne sont pas tous distincts, et aussi que $\sigma\alpha = sgn(\sigma)\alpha$ pour tout $\sigma \in S_k$. Ainsi, on peut se ramener au cas où les indices sont tous distincts et ordonnés. Donc $\{\varepsilon_{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon_{i_k} | 1 \le i_1 < ... < i_k \le n\}$ engendre $\Lambda_k(V)$. Il reste à voir que ces éléments sont linéairement indépendants. Soit $e_1, ..., e_n$ la base de V duale à ε_i et supposons $1 \le i_1 < ... < i_k \le n$ et $1 \le j_1 < ... < j_k \le n$, alors on a

$$\varepsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_k}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = det(\varepsilon^{i_\mu}(e_{j_\nu}) = \delta_{i_\mu j_\nu}.$$

Ceci entraine que les ε^I sont linéairement indépendants.