11.1. Soient (x, y, z) les coordonées standart de $\mathbb{R}^3$ et (v, w) les coordonnées standart de $\mathbb{R}^2$. Soit $\phi(x, y, z) = (x + z, xy)$. On définit $\alpha = e^w dv + vdw$ et $\beta = vdv \wedge dw$ des formes sur $\mathbb{R}^2$. Calculer

- $\alpha \wedge \beta = 0$ car c'est une 3-forme sur une variété de dimension 2.
- Ici on a $v = x + z$ et $w = xy$, donc $dv = dx + dz$ et $dw = ydx + xdy$. On peut donc calculer

$$\phi^\star\alpha = e^{xy}dv+(x+z)dw = e^{xy}dx+e^{xy}dz+(x+z)ydx+(x+z)xdy = (e^{xy}+y(x+z))dx+(x+z)xdy+e^{xy}dz.$$

- De même qu'au dessus:

$$\phi^\star\beta = (x + z)(dx + dz) \wedge (ydx + xdy) = x(x + z)dx \wedge dy + y(x + z)dz \wedge dx + x(x + z)dz \wedge dy.$$

- De manière similaire on trouve

$$\phi^\star\alpha \wedge \phi^\star\beta = 2x(y(x + z)^2 - e^{xy}(x + z))dx \wedge dy \wedge dz.$$

11.2. Calculer la différentielle exterieure des formes suivantes:

- Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, $\theta = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.
- Sur $\mathbb{R}^3$, $\phi = \cos(x)dy \wedge dz$.

$$d(cos(x)dy \wedge dz = -\sin(x)dy \wedge dz \wedge dx = \sin(x)dx \wedge dy \wedge dz.$$

- Sur $\mathbb{R}^3$, $\omega = Adx + Bdy + Cdz$.

$$d\omega = (\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x})dx \wedge dy + (\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x})dx \wedge dz + (\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y})dy \wedge dz.$$

11.3. Montrer que pour $F : M \to N$ une fonction lisse et $\omega \in \Omega^k(N)$ et $\nu \in \Omega^l(N)$, on a

- $F^\star(\omega \wedge \nu) = F^\star\omega \wedge F^\star\nu$
- Dans n'importe quel système de coordonées, on a

$$F^\star(\sum_I \omega_I dy^I) = \sum_I (\omega_i \circ F)d(y^{i_1} \circ F) \wedge ... \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

11.4. Comme toute 1-forme peut être exprimée localement comme une somme de udv où u, v sont des fonctions lisses, il suffit de montrer le résultat pour $\omega = udv$ et X, Y deux champs de vecteurs lisses. Alors

$$d(udv)(X, Y) = du \wedge dv(X, Y) = du(X)dv(Y) - dv(X)du(Y) = XuYv - XvYu$$

et

$$X(udvY) - Y(udvX) - udv([X, Y]) = X(uYv) - Y(uXv) - u[X, Y]v$$
$$= (XuYv + uXYv) - (YuXv + uYXv) - u(XYv - YXv) = XuYv - XvYu.$$

Ce qui prouve le résultat.