EPFL - Automne 2020	Y. Lodha, G. Buro
Smooth Manifolds	**Série**
série 12	1er décembre 2020

Soit M une variété lisse. Une métrique Riemannienne sur g sur M est un 2-tenseur lisse symétrique et défini positif en tout $p \in M$.

12.1. Soit M une variété lisse et soit (U_i, ϕ_i) une carte locale de M. $\phi_i(U_i)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut donc rappeler $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$ sur U_i. Soit donc $h_i = \phi_i^\star g : U_i \times U_i \to \mathbb{R}$. On a donc définit une métrique Riemannienne sur chaque ouvert de carte de M, mais nous n'avons pas encore une métrique globale. Pour celà, il faut utiliser une partition de l'unité $\{\eta_i\}$ associée à l'atlas $\{(U_i, \phi_i\}$ de M. On définit alors $= \sum \eta_i h_i$ qui est la métrique Riemannienne voulue car pour un $p \in M$ on peut trouver un η_k tel que $\eta_k(p) > 0$. Donc

$$h(u,u) = \sum \eta_i(p) h_i(u,u) \geq \eta_k(p) h_k(u,u) > 0$$

et la métrique est bien définie positive.

12.2. Pour l'unicité de la différentielle extérieure, supposer que d est n'importe quel opérateur satifaisant la définition de la différentielle extérieure. Nous allons commencer par montrer que $d\omega$ est définie localement. Montrons que si ω_1 et ω_2 sont deux k-formes qui coincident sur un ouvert $U \in M$, alors $d\omega_1 = d\omega_2$ sur U. Pour voir celà, soit $p \in U$ un point arbitraire et soit $\eta = \omega_1 - \omega_2$ et ψ une fonction plateau sur U, identiquement 1 sur un voisinage de p contenu dans U. Alors $\phi\eta$ est identiquement nul sur tout M et donc $0 = d(\psi\eta) = d\psi \wedge \eta + \psi d\eta$. En évaluant ceci en p et en utilisant les faits que $\psi(p) = 1$ et $d_p\psi = 0$ on obtient $d\omega_1|_p - d\omega_2|_p = d\eta|p = 0$.
Soit maintenant $\omega \in \Omega^k(M)$ une k-forme arbitraire et (U, ϕ) un ouvert de coordonnées. En coordonnées on peut écrire $\omega = \omega_I dx^I$ sur U. Pour chque $p \in U$, en utilisant une fonction plateau on peut construire des fonctions lisses globales $\tilde{\omega}_I$ et $\tilde{x}^i$ sur M qui coincident avc ω_I et x^i sur un voisinage de p. Par les propriétés de d et ce que nous avons montré au paragraphe précédent, on obtient que d est unique en p, et comme p est arbitraire, nous avons montré la proposition.

12.3. (Lemme de Poincaré)

- Noter que $H^0(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) | df = 0\}$ car $\mathbb{B}^0(\mathbb{R}^n) = 0$. De plus on sait que si $df = 0$ sur une variété simplement connexe, alors f est constante. Donc $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.
- Il s'agit maintenant de montrer que toute 1-forme fermée sur $\mathbb{R}^n$ est exacte. Pour $\omega \in \Omega^1(M)$, on peut écrire $\omega = \omega_i dx^i$ avec $\omega_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions lisses. En supposant que ω est fermée, on peu écrire $d\omega = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0$, ce qui implique que $\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$ comme vu dans un exercice précédent.
  On donc peut définir $\Phi(x) := \sum_{i=1}^n \int_0^1 \omega_i(tx) x^i dt$. On a bien alors que $\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \omega_i$, donc $\omega = d\phi$. On a donc montré que la forme fermée est exacte.