EE206 Systèmes de mesure

Module 1: Calcul d'erreur

Dr J.-M. Fürbringer

Faculté des Sciences de base

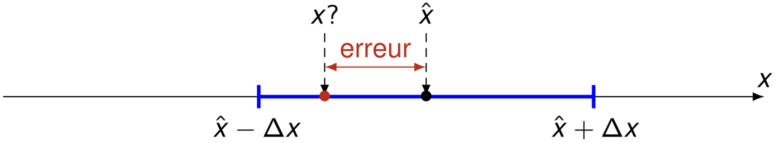
École Polytechnique Fédérale de Lausanne

February 22, 2021

1. Erreurs de mesure

1.1 Erreurs et incertitudes

- Le mot "erreur" n'a pas le même sens dans le langage courant, qu'en science expérimentale où il signifie "incertitude"
- Aucune mesure n'est absolument exacte et donc la valeur vraie est (en général) inconnue
- L'objectif est de tendre à des erreurs aussi petites que possible et d'avoir une estimation de leur amplitude



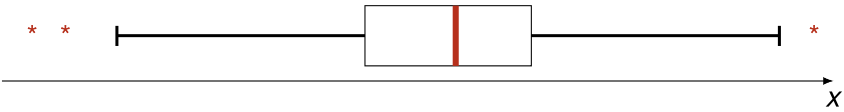
- Un résultat expérimental $\hat{x}$ est incomplet sans une estimation d'erreur:
  1. l'intervalle $\pm\Delta x$
  2. la probabilité de cet intervalle, $p(\hat{x} - \Delta x \leqslant x \leqslant \hat{x} + \Delta x)$

1.2 Types d'erreur: erreur accidentelle

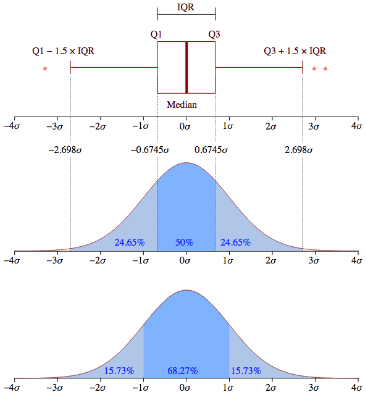
- Erreur de protocole
- Erreur de lecture
- Panne d'un élément

⇒ A éviter par tous les moyens : répétitions de la mesure et élimination des données erronées

⇒ Analyse visuelle (boxplot) des données pour détecter des *outliers*



1.3 Box-plot (définition)



1. La barre verticale indique la position de la médiane
2. Les *outliers* sont les points éloignés de plus de 1.5 IQR [a] à gauche de Q_1 ou à droite de Q_3 et rerésenté ar des astérisques
3. Les moustaches sont placées au minimum ou maximum des points une fois exclus les outliers

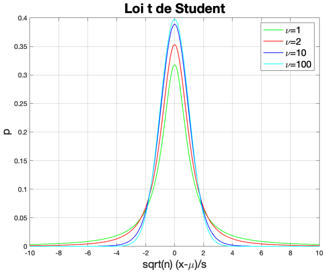
---

[a] IQR signifie Inter-quartile range, c'est la plage incluant 50% des mesures, entre le deuxième et le troisième quartile

1.4 Types d'erreur: erreur aléatoire

- décrite par une distribution,
- fréquemment la distribution normale

$\Rightarrow$ répliquer la mesure (loi de Student: $N \approx 10$)



1.5 Types d'erreur: erreur systématique

Facteurs:

- Qualité de la technologie et de l'étalonnage
- Qualité du protocole et de l'opérateur
- Phénomènes physiques perturbant la mesure

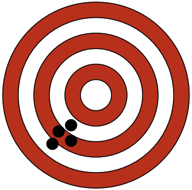
Solutions:

$\Rightarrow$ Améliorer l'étalonnage, contrôler l'expérience

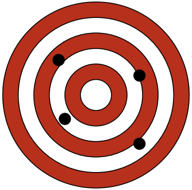
$\Rightarrow$ Les bons instruments de mesure sont calibrés par rapport aux normes maintenues par des bureaux nationaux, voire internationaux, de poids et mesures.

1.6 Erreurs aléatoires vs systématiques

Précision vs exactitude



faibles erreurs aéatoires et
fortes erreurs systématiques



fortes erreurs aéatoires
et faibles erreurs
systématiques

$\Rightarrow$ Vérification et étalonnage systématique des instruments

1.7 Précision d'un voltmètre numérique

Exemple des indications du fabriquant

2. Mesure de tension alternative

Gamme	Résolution	Précision
400,0 mV	0,1 mV	± (1,2 % + 3 chiffres)
4,000 V	1 mV	± (1,0 % + 3 chiffres)
40,00 V	10 mV	
400,0 V	100 mV	
600 V	1 V	± (1,2 % + 3 chiffres)

Remarque : Gamme manuelle uniquement pour la gamme 400,0 mV.
Impédance d'entrée : Environ 10 MΩ
Réponse en fréquence : 45 Hz à 400 Hz
AM-520 / AM-520-EUR : Indication des mesures eff. à détection moyenne
AM-530 / AM-530-EUR : Mesure efficace vraie (TRMS).
Protection contre les surcharges : 600 V eff.

3. Mesure de résistance

Gamme	Résolution	Précision
400,0 Ω	0,1 Ω	± (1,2 % + 2 chiffres)
4,000 kΩ	1 Ω	± (1,0 % + 2 chiffres)
40,00 kΩ	10 Ω	
400,0 kΩ	100 Ω	
4,000 MΩ	1 kΩ	± (1,2 % + 2 chiffres)
40,00 MΩ	10 kΩ	± (1,5 % + 5 chiffres)

Gamme 400 Ω : Valeur mesurée = (valeur d'affichage mesurée – valeur de court-circuit de la sonde)
Tension en circuit ouvert : Environ 0,5 V
Protection contre les surcharges : 600 V eff.

1.8 Exemple: mesure d'une tension alternative

- → Appareil sur *autorange* : la gamme utilisée est 400.0 mV
- → Les digits de l' affichage cohérents avec le range de 400.0mV
- → Indications du fabricant
  - Résolution: 0.1 mV
  - Précision: $\pm 1.2\% + 3$ chiffres
- → Erreur absolue

$$\begin{aligned} \pm 37.4 \times 1.2\% &= \pm 0.4488 \\ +0.3 &= +0.3 \\ &\approx \pm \mathbf{0.7mV} \end{aligned}$$

1.9 La détermination de l'incertitude

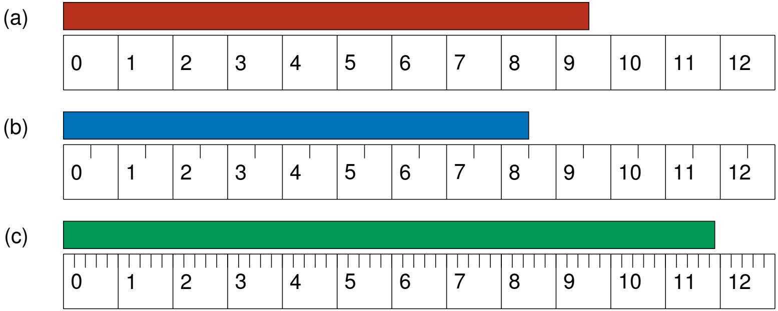
La détermination de l'incertitude est composées de trois éléments

1. La précision de l'instrument
2. L'incertitude estimée
3. L'incertitude statistique lorsqu'il y a des mesures répétées

1.10 La précision de l'instrument

- Pour la précision de l'instrument, il faut considérer:
  - La **plus petite division** (The least count) de l'instrument. Un *mètre* a des divisions espacées d'au moins 1,0 mm.
  - La **précision de l'instrument**, (Instrument Limit of Error, ILE), est la précision à laquelle un appareil de mesure peut être lu. La précision est toujours égale ou inférieure à la plus petite division.
- La précision de l'instrument est généralement considérée comme égale à la plus petite division ou une fraction (1/2, 1/5, 1/10) de celle-ci.
- Aucune règle stricte: utiliser le bon sens.
- Affichages digitaux: la précision est $1/2$ du dernier digit par défaut. Mieux: consulter les spec !
- Pour certains appareils, la précision est donnée sous forme d'une **tolérance** ou d'un pourcentage.

1.11 Lecture sur une échelle



	Division	Précision	Lecture
(a)			
(b)			
(c)			

1.12 L'incertitude estimée

L'incertitude estimée est généralement plus grande que la précision de l'instrument. Elle dépend de la sensibilité de l'instrument:

- *Exemple 1*: un balance avec des divisions de 0.1 g, mais qui ne réagit pas à moins de 1 g

$\Rightarrow$ L'incertitude sera estimée à ± 0.5 g

- *Exemple 2*: mesure de la longueur focale d'une lentille avec une règle dont la précision est de 0.5 mm. Cependant la position de l'écran peut changer de 1 cm sans changer la netteté de l'image

$\Rightarrow$ L'incertitude sera estimée à ± 0.5 cm

1.13 Indication de l'erreur de mesure

Erreur absolue Intervalle symbolisé par la notation $\pm\Delta x$, déterminant un intervalle symétrique autour du nombre donné comme résultat x, dans la même unité et dans lequel on a une probabilité de 100% de trouver la vraie valeur. Exemple: $U_o = (4.56 \pm 0.04)V$.

Erreur relative Indication de la précision symbolisé par la notation δx, correspondant au rapport entre l'erreur absolue et le résultat de la mesure. $\delta x = \frac{\Delta x}{x}$. La mesure est d'autant plus précise que son erreur relative est faible. Exemple: $\delta U_o = 0.9\%$.

Incertitude en digit Le nombre de digits, spécifié comme incertitude dans les spécifications d'un instrument avec affichage digital et qui correspond au nombre d'unités sur les derniers chiffres affichés par l'instrument à considérer comme incertains. Exemple: si l'affichage de l'instrument indique '04.560' et que les spécifications donnent 12 digits d'incertitude cela correspond à un résultat de $U_o = 4.560 \pm 0.012V$, alors que si l'affichage est '004.56', sur le même appareil, cela correspond à un résultat de $U_o = 4.56 \pm 0.12V$.

1.14 Chiffres significatifs et arrondis

Principe:

1. Arrondir l'incertitude à un ou deux chiffres significatifs
2. Arrondir le résultat en gardant le même nombre de décimales
3. Indiquer l'unité

Illustration:

- Mesures effectuées avec un voltmètre
- Sensibilité: 0.02 V
- Moyenne calculée: 12.14286 V
- Écart-type: 0.07313 V

a) ☐ 12.14286 V

b) ☐ $(12.14 \pm 0.02)\ V$

c) ☐ $12.14286\ V \pm 0.07313$

d) ☐ $12.143 \pm 0.073\ V$

e) ☐ (12.14 ± 0.07)

f) ☐ $(12.14 \pm 0.07)\ V$

1.15 Combinaison des erreurs - Méthode 1

- On considère une valeur calculée y à partir de plusieurs mesures, $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

.

- L'erreur Δ_y peut être estimée à partir des erreurs des mesures Δ_{x_i}

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta_{x_i} \right| \tag{1.1}$$

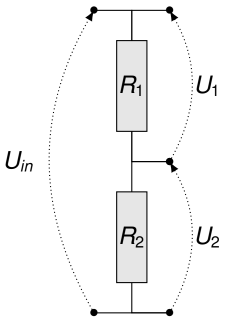
- Le résultat expérimental pourra alors être représenté par $y = \hat{y} \pm \Delta_y$
- Il est important que chaque erreur estimée corresponde à un niveau de confiance similaire aux autres et qu'il soit reporté.

1.15 Combinaison des erreurs

Erreurs relatives et absolues, calculées avec la méthode 1, pour les quatre opérations arithmétiques

fonction	erreur absolue	erreur relative
$y = x_1 + x_2$	$\Delta y = \lvert\Delta x_1\rvert + \lvert\Delta x_2\rvert$	
$y = x_1 - x_2$	$\Delta y = \lvert\Delta x_1\rvert + \lvert\Delta x_2\rvert$	
$y = x_1 \cdot x_2$	$\Delta y = \lvert x_2\ \Delta x_1\rvert + \lvert x_1\ \Delta x_2\rvert$	$\dfrac{\Delta y}{y} = \left\lvert\dfrac{\Delta x_1}{x_1}\right\rvert + \left\lvert\dfrac{\Delta x_2}{x_2}\right\rvert$
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\Delta y = \left\lvert\dfrac{\Delta x_1}{x_2}\right\rvert + \left\lvert\dfrac{-x_1}{x_2^2}\Delta x_2\right\rvert$	$\dfrac{\Delta y}{y} = \left\lvert\dfrac{\Delta x_1}{x_1}\right\rvert + \left\lvert\dfrac{\Delta x_2}{x_2}\right\rvert$

1.16 Exemple: combinaison d'erreurs



Addition

$$\text{si} \begin{cases} U_1 = (450.4 \pm 5.7)\ \ mV \\ U_2 = (146.2 \pm 2.1)\ \ mV \end{cases} \quad \text{alors}$$

$$U_{in} = U_1 + U_2 = 596.6 \pm 7.8 \approx (597 \pm 8)\ \ mV$$

Différence

$$\text{si} \begin{cases} U_1 = (451.5 \pm 5.7)\ \ mV \\ U_{in} = (584.2 \pm 7.3)\ \ mV \end{cases} \quad \text{alors}$$

$$U_2 = U_{in} - U_2 = 132.7 \pm 13 \approx (133 \pm 13)\ \ mV$$

Produit et Division

$$\text{si} \begin{cases} U_{in} = (9.12 \pm 0.12)\ \ V \\ R_1 = (100 \pm 1)\ \ \Omega \\ R_1 = (50 \pm 1)\ \ \Omega \end{cases} \quad \text{alors}$$

$$U_2 = U_{in}\ \frac{R_2}{R1+R2} \approx (3.04 \pm 0.13)\ \ V$$

1.17 Exemple: combinaison d'erreurs

$$U_2 = U_{in} \frac{R_2}{R_1+R_2} = 9.12 \frac{50}{150} = 3.04\ [V]$$

Calcul de l'erreur

$$\delta u_2 = \delta u_{in} + \delta R_2 + \delta (R_1+R_2)$$

$$= \frac{\Delta u_{in}}{u_{in}} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_1 + \Delta R_2}{R_1+R_2}$$

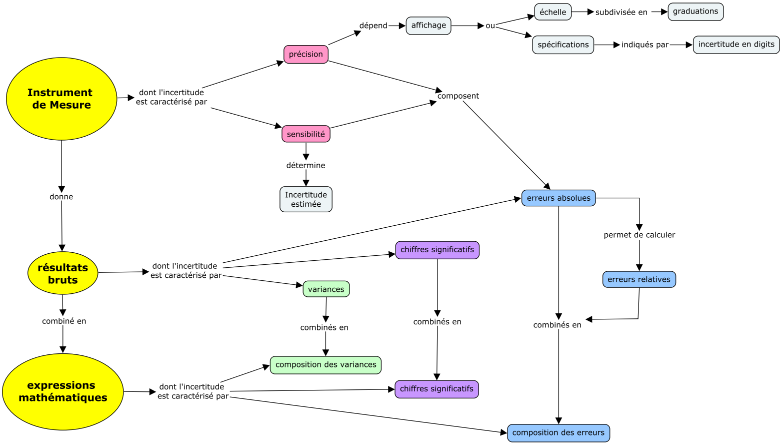
$$= \frac{0.12}{9.12} + \frac{1}{50} + \frac{2}{150}$$

$$= 1.3\,\% + 2\,\% + 1.33\,\% = 4,63\%$$

$$\Delta u_2 = \delta u_2 \times U_2 = 3.04 \times 4.63\% = 0,13\ [V]$$

$$U_2 = (3,04 \pm 0,13)\ [V]$$

1.18 Résumé


Instrument de Mesure
dont l'incertitude est caractérisé par
précision
dépend
affichage
ou
échelle
subdivisée en
graduations
spécifications
indiqués par
incertitude en digits
sensibilité
composent
détermine
Incertitude estimée
donne
erreurs absolues
permet de calculer
erreurs relatives
résultats bruts
dont l'incertitude est caractérisé par
chiffres significatifs
variances
combiné en
combinés en
combinés en
combinés en
expressions mathématiques
dont l'incertitude est caractérisé par
composition des variances
chiffres significatifs
composition des erreurs