1.1. (a) Exprimer la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^2$ en coordonnées polaires.

(b) (Surface de révolution) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane régulière paramétrée par longueur d'arc. On pose $\gamma(u) = (r(u), z(u))$ et on suppose que $r(u) > 0$. On obtient une surface S qui est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ par rotation de γ autour de l'axe Oz. Cette surface est paramétrée par

$$\Psi(u, \theta) = (r(u)\cos\theta, r(u)\sin\theta, z(u)).$$

Exprimer la trace de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$ dans le système de coordonnées (u, θ).

(c) Soit $n \geqslant 1$ et $N = (0, \cdots, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Considérons la projection stéréographique f de $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ dans l'hyperplan $\mathbb{R}^n$ des n premières coordonnées de $\mathbb{R}^{n+1}$, qui associe à un point x l'unique point d'intersection de la droite passant par N et x avec $\mathbb{R}^n$. Montrer que f envoie la métrique sphérique usuelle de $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ sur la métrique

$$g = \frac{4\sum_{i=1}^n dx_i^2}{\left(1 + \|x\|^2\right)^2}.$$

(d) Calculer cette métrique dans le cas de la sphère de rayon $a > 0$ (centrée en 0).

1.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne connexe. Pour $p, q \in M$, on note $\mathcal{C}_{p,q}$ l'ensemble des chemins $\gamma : [a, b] \to M$ reliant p à q qui sont continus et de classe C^1 par morceaux . Montrer que

$$d_g(p, q) := \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{p,q}\}$$

définit une métrique sur M.

1.3. Soient $p \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donnée par $f(x) = ||x||^{2p}x$.

(a) Pour quelles valeurs de p la fonction f est elle conforme?

(b) Montrer que quand $p = -1$, l'application f est une isométrie pour la métrique sphérique de l'exercice 1.1 c).

1.4. Si U est un ouvert d'une variété semi-Riemannienne (M, g) et $x^1, \ldots, x^n$ est un système de coordonnées locales sur U, alors on définit le volume de (U, g) par

$$\mathrm{Vol}_g(U) = \int_U \sqrt{|\det(g_{ij})|}dx^1 \cdots dx^n.$$

Démontrer soigneusement que cette notion est indépendante du choix du système de coordonnées.