| | |
|---|---|
| EPFL - Printemps 2021 | M. Troyanov, G. Buro |
| **Géométrie Riemannienne** | **Exercices** |
| Série 3 | 09 Mars 2021 |

**3.1**. (a) Le *demi-plan de Poincaré* est le domaine $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ muni de la métrique Riemannienne

$$h = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

(a) Calculer l'aire de la région $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < a,\ b < y\}$ pour cette métrique.

(b) On identifie $(x, y)$ à $z = x + iy$. Montrer que l'application (homographie) définie par

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ et $ad - bc > 0$ est une isométrie pour la métrique $h$.

(c) Trouver l'inverse de cette isométrie.

(d) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$ définie par

$$\varphi(z) = -i \cdot \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$$

est bi-holomorphe ($\mathbb{D}^2$ est le disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$).

(e) Calculer l'application inverse $\varphi^{-1} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$.

(f) Calculer la métrique riemanienne $g = \varphi^*(h)$.

*Les variétés riemanniennes* $(\mathbb{H}^2, h)$ *et* $(\mathbb{D}^2, h)$ *sont donc isométriques. On appelle l'une ou l'autre le* plan hyperbolique.

**3.2**. (a) Montrer que les équations des géodésiques du demi-plan de Poincaré $\{(x, y) \mid y > 0\}$ avec la métrique $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ s'écrivent

$$\ddot{x} = 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}, \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}.$$

(b) Montrer que $\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ et $\frac{\dot{x}}{y^2}$ sont des intégrales premières pour ces équations.

**3.3**. (a) Soit $f : T\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un lagrangien autonome sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que si $t \mapsto x(t)$ est une courbe extrémale pour l'action associée, alors

$$A(x, v) = v^i \frac{\partial f}{\partial v^i}(x, v) - f(x, v)$$

est une « intégrale première du mouvement » (cela signifie $A(x(t), \dot{x}(t))$ est constante par rapport à $t$).

(b) Déduire de (a) que si le Lagrangien $f(x, v)$ est autonome et homogène de poids $r \neq 1$ en $v$, alors la fonction $f$ elle-même est une intégrale première (une fonction de classe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *homogène* de poids $r$ si $h(\lambda v) = \lambda^r h(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$; dans ce cas on a la *relation d'Euler* $v^i \frac{\partial h}{\partial v^i} = rh(v)$ [écrire la preuve, qui est facile]).

(c) Déduire de (b) que si le Lagrangien est de la forme

$$f(x,v) = \frac{1}{2}m \cdot g_{ij}(x)v^i v^j - U(x),$$

où $m$ est une constante, $U : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^1$ et $g_{ij}$ est une métrique semi-riemannienne sur $\Omega$, alors $\left(\frac{1}{2}m \cdot g_{ij}(x)v^i v^j + U(x)\right)$ est une intégrale première.

(d) i. Expliquer le lien avec le « principe de conservation de l'Energie » de la mécanique analytique.

ii. Montrer à que toute géodésique d'une variété riemannienne est parcourue à vitesse constante.

(e) Montrer que si $f(x^1, \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n)$ ne dépend pas de la coordoonée $x^i$, alors $\frac{\partial f}{\partial v^i}$ est une intégrale première du système (dans ce cas on dit que $x^i$ est une *coordonnée cyclique* pour le Lagrangien $f$ et que $p^i = \frac{\partial f}{\partial v^i}$ est le *moment conjugué* de cette coordonnée).

**3.4**. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné et $\varphi : U \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable. La *graphe* de $\varphi$ est par définition la sous-variété

$$S = S_\varphi = \{(x, \varphi(x) \mid x \in U\} \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

On muni $S_\varphi$ de la métrique Riemannienne induite par la métrique euclidienne standard de $\mathbf{R}^{n+1}$. Prouver la formule de Cauchy :

$$\mathrm{Vol}(S_\varphi) = \int_U \frac{dx}{|\cos(\theta(x))|},$$

où $\theta(x)$ est l'angle entre un vecteur normal à $S_\varphi$ et le vecteur $\mathbf{e}_{n+1}$ au point $(x, \varphi(x)) \in S_\varphi$.

**3.5**. (*) Soit $G$ un groupe de Lie. On rappelle que si $g$ est un élément de $G$, les multiplications par $g$,

$$\begin{array}{rccc} L_g : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & gx \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} R_g : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & xg \end{array}$$

sont des difféomorphismes, appelées respectivement multiplication à gauche et à droite.

(a) On fixe un produit scalaire quelconque sur $T_eG$. Comment peut-on construire une métrique invariante par multiplications à gauche sur $G$. Montrer que la forme volume associée est aussi invariante à gauche. Cette mesure s'appelle la forme de Haar du groupe.

(b) On dit qu'un groupe est unimodulaire si la forme volume construite à la question précédente est aussi invariante à droite.

i. Montrer qu'un groupe abélien est unimodulaire.

ii. Montrer qu'un groupe compact est unimodulaire.

iii. $(*)$ Montrer qu'un groupe nilpotent est unimodulaire.

(c) Dans cette question on s'intéresse au groupe $G$ des transformations affines directes de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire le groupe des transformations

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & t & \longmapsto & yt + x \end{array},$$

où $y > 0$ et $x \in \mathbf{R}$. Comme variété différentiable, $G$ est le demi-plan

$$G = \{(x, y) \; ; \; y > 0\}.$$

On construit une métrique invariante à gauche sur $G$ en fixant sa valeur en l'élément neutre $(0,1)$ par

$$g_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i. Montrer que cette métrique est la métrique hyperbolique.

ii. La forme de Haar est-elle invariante à droite ?

(d) Dans cette question on suppose que le groupe $G$ est compact (donc unimodulaire d'après ce qui précède). On fixe $g$ une métrique invariante à gauche.

i. Montrer que $G$ est de volume fini pour la forme de Haar associée à $g$.

ii. Construire sur $G$ une métrique bi-invariante.