1.1. (a) La métrique s'écrit en coordonnées polaires sous la forme

$$g = g_{rr}dr^2 + g_{r\theta}drd\theta + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

et l'exercice consiste à expliciter les fonctions g_{rr}, $g_{r\theta}$ et $g_{\theta\theta}$. On sait que ces fonctions sont données par la valeur de la métrique sur les champs de coordonnées. La paramétrisation du plan en coordonnées polaires,

$$(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

fournit un système de coordonnées locales et les champs associés sont

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = (cos\theta, \sin\theta)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta).$$

Il reste à calculer tous les produits scalaires (avec la métrique euclidienne) possibles entre ces deux champs de vecteurs. On trouve finalement

$$g = dr^2 + r^2d\theta^2.$$

(b) La méthode est similaire puisqu'on dispose d'une paramétrisation de la surface donc d'un système de coordonnées locales. Les champs associés à ce système de coordonnées sont donnés par

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial u} = (r'(u)\cos\theta, r'(u)\sin\theta, z'(u))$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial S}{\partial\theta} = (-r(u)\sin\theta, r(u)\cos\theta, 0).$$

On calcule ensuite les produits scalaires entre ces champs. En utilisant $r'(u)^2 + z'(u)^2$ (qui traduit l'hypothèse que la courbe γ est paramétrée par longueur d'arc), on obtient

$$g = du^2 + r(u)^2d\theta.$$

(c) Pour pouvoir rappeler la métrique de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, on utilise l'inverse de la projection stéréographique,

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n.$$

Cette application f (`https://fr.wikipedia.org/wiki/Projection_stéréographique`) s'explicite et on trouve

$$\varphi(y) = \left(\frac{2y}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\right).$$

La métrique que l'on cherche est alors $g = \varphi^* g_{\text{sp}}$ ou plus explicitement,

$$g_y(u, u) = (g_{\text{sp}})_{\varphi(y)}(d_y\varphi \cdot u, d_y\varphi \cdot u).$$

On doit maintenant différentier φ. Calculons d'abord la différentielle de $||y||^2$:

$$d_y||.||^2 \cdot u = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}||y+tu||^2 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle y+tv, y+tv\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\langle y,y\rangle + 2\langle y,v\rangle + \langle tu,tu\rangle) = 2\langle y,v\rangle.$$

On obtient donc:

$$d_y\varphi \cdot u = \left(\frac{2u}{\|y\|^2+1} - \frac{4y < u,y >}{(\|y\|^2+1)^2}, \frac{4 < u,y >}{(\|y\|^2+1)^2}.\right)$$

Il est maintenant facile de calculer l'expression de g; on obtient

$$g_y(u,u) = \frac{4\|u\|^2}{(\|y\|^2+1)^2}$$

On peut faire un calcul en coordonnées (ici en dimension 2) qui donne le même résultat et qui peut paraitre plus facile au premier abord.

La paramétrisation de la projection stéréographique inverse s'écrit:

$$\psi(u,v) = \lambda(u,v)\ (2a^2u, 2a^2v, a(u^2+v^2-a^2)), \qquad \text{avec} \qquad \lambda(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+a^2}.$$

Il peut être utile et rassurant de vérifier qu'on a bien $\|\psi(u,v)\| = a$ (i.e. $\psi(u,v)$ appartient à la sphère S_a)).

Pour calculer le tenseur métrique, il est utile de noter que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = -2\lambda^2 u, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = -2\lambda^2 v.$$

On a (après quelques calculs)

$$\begin{cases} b_1 &= \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = 2a^2\lambda^2\ \big((a^2-u^2+v^2), -2uv, 2au\big) \\ b_2 &= \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = 2a^2\lambda^2\ \big(-2uv, (a^2+u^2-v^2), 2av\big). \end{cases}$$

on voit facilement que $g_{12} = \langle b_1, b_2\rangle = 0$. On a aussi

$$g_{11} = \langle b_1, b_1\rangle = 4a^4\lambda^4\ \big((a^2-u^2+v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4a^2u^2\big) = 4a^4\lambda^2$$

et de même $g_{22} = 4a^4\lambda^2$. Ainsi le tenseur métrique est

$$G(u,v) = 4a^4\lambda(u,v)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que l'on écrit souvent sous la forme

$$ds^2 = \frac{4a^4(du^2+dv^2)}{(a^2+u^2+v^2)^2}.$$

(Les calculs confirment que les champs b_1 et b_2 sont linéairement indépendant et donc la paramétrisation est régulière).

(d) Le raisonnement est similaire; on trouve cette fois

$$\varphi(y) = \left(\frac{2a^2 y}{\|y\|^2 + a^2}, a \left(1 - \frac{2a^2}{\|y\|^2 + a^2} \right) \right)$$

puis

$$g_y(u, u) = \frac{4a^2 \|u\|^2}{\left(a^2 + \|y\|^2\right)^2}.$$

1.2. On rappelle tout d'abord que l'ensemble sur lequel on prend l'inf n'est pas vide, c'est-à-dire qu'étant donnés p et q dans M, il existe bien un chemin qui joint p à q (autrement dit un espace topologique qui est à la fois connexe et une variété différentiable est connexe par arc). Ensuite on peut régulariser un chemin continu pour le rendre $\mathcal{C}^1$ (par un argument de densité). Admettons tout ça et vérifions seulement que d_g vérifie les axiomes d'une distance.

(a) $d_g(p, q) = d_g(q, p)$ est évident puisqu'un chemin de p à q se transforme en un chemin de q à p de même longueur en renversant le sens de parcours.

(b) Fixons trois points p, q et r de M et vérifions l'inégalité triangulaire. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition d'un inf, on sait qu'il existe un chemin c joignant p à q et un chemin c' joignant q à r et tels que

$$l(c) < d_g(p, q) + \varepsilon \text{ et } l(c') < d_g(r, q) + \varepsilon.$$

La concaténation des chemins c et c' fournit un chemin de p à r de longueur $l(c) + l(c')$. Ainsi

$$d_g(p, r) \leqslant l(c \cup c') = l(c) + l(c') < d_g(p, q) + d_g(q, r) + 2\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitrairement petit, cette inégalité suffit.

(c) $d_g(p, p) = 0$ est évident.

(d) Le point délicat de l'exercice consiste à montrer que si p et q sont deux point distincts, leur distance est strictement positive. Prenons donc une courbe c de p à q et montrons que sa longueur est uniformément minorée.

On peut choisir une carte (U, φ) de sorte que $p \in U$ et $q \neq U$ (on utilise ici le fait que M est séparée !), que $\varphi(U) = B(0, 1)$ et $\varphi(p) = 0$ (quitte à réduire l'ouvert à l'arrivée et composer par une application affine). Nous allons raisonner dans la carte. On considère donc la métrique h sur $B(0, 1)$ donnée par $h = \varphi^{-1*} g$ de sorte que maintenant, en plus d'êtres difféomorphes les ouverts U et $B(0, 1)$ sont *isométriques*. Il est donc équivalent de mesurer des longueurs dans U avec g ou dans $B(0, 1)$ avec h.

La boule fermée $\overline{B}(0, \frac{1}{2})$ est compacte donc il existe une constante λ telle que pour tout $x \in \overline{B}(0, \frac{1}{2})$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda \|u\|^2 \leqslant h_x(u, u)$$

(les normes sont équivalentes et la constante ne dépend pas du point par compacité). On note enfin γ la courbe $\varphi \circ c$ et t le temps auquel γ touche la sphère $S(0, \frac{1}{2})$. Alors

$$\begin{aligned} l(c) &\geqslant \int_0^t \sqrt{g_{c(s)(c'(s), c'(s)}} dt \\ &= \int_0^t \sqrt{h_{\gamma(s)(\gamma'(s), \gamma'(s)}} dt \\ &\geqslant \int_0^t \sqrt{\lambda} \|\gamma'(s)\| dt \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2}. \end{aligned}$$

1.3. (a) On va donner deux façons différentes de montrer que f est conforme si et seulement si $p = 0, -1$.

- Première façon:
  Calculons $d_x f$, en utilisant le calcul de la différentielle de la norme au carré effectué dans l'exercice 1.1 c) et la règle de dérivation en chaine.

$$\begin{aligned} d_x f \cdot v &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+tv) = ||x||^{2p} v + 2p||x||^{2p-2}\langle x, v\rangle x \\ &= ||x||^{2p}\left(v + 2p\frac{\langle x, v\rangle}{||x||^2} x\right) \end{aligned}$$

  Ceci est l'identité dans le cas où $p = 0$ et est une réflexion à travers un plan perpendiculaire à x multiplié par une dilatation par $||x||^{-2}$ si $p = -1$. Si p n'a pas une de ces deux valeurs, alors f n'est pas une similitude, et ne peut donc pas être conforme.
- Seconde façon (Cette approche est plus Riemannienne que la première).
  Notons $y = f(x)$, $y^i = f^i(x)$ et Eucl la métrique Euclidienne. Si on note $g = f^\star \mathrm{Eucl}$, alors

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle f_\star\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), f_\star\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\rangle \\ &= \langle \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \frac{\partial f^\nu}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\rangle \\ &= \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial f^\nu}{\partial x^j}\langle \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \frac{\partial}{\partial y^\nu}\rangle \\ &= \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial f^\nu}{\partial x^j}\delta_{\mu\nu} \\ &= \sum_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial f^\mu}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

  On a $f^\mu(x) = ||x||^{2p}x^\mu$, par conséquent

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}(||x||^{2p})x^\mu + ||x||^{2p}\delta_i^\mu = ||x||^{2p}\left(\delta_i^\mu + 2p\frac{x^i x^\mu}{||x||^2}\right).$$

  Donc on obtient, en posant $r = ||x||$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= r^{4p}\sum_\mu \left(\delta_i^\mu + 2p\frac{x^i x^\mu}{r^2}\right)\left(\delta_j^\mu + 2p\frac{x^j x^\mu}{r^2}\right) \\ &= r^{4p}\sum_\mu \left(\delta_i^\mu\delta_j^\mu + 2p\delta_i^\mu\frac{x^\mu x^j}{r^2} + 2p\delta_j^\mu\frac{x^\mu x^i}{r^2} + \frac{4p^2}{r^4}(x^\mu)^2 x^i x^j\right). \end{aligned}$$

  Si $i \neq j$, alors

$$g_{ij} = r^{4p}\left(4p\frac{x^i x^j}{r^2} + \frac{4p^2}{r^2}x^i x^j\right).$$

  Si $i = j$, alors

$$g_{ii} = r^{4p}\left(1 + \frac{4(p+p^2)}{r^2}(x^i)^2\right).$$

  On a donc que $p = 0$ ou $p = -1$ si et seulement si $g_i j = r^{4p}\delta_{ij}$ ce qui est bien la définition de métrique conforme à la métrique Euclidienne.

(b) Soit

$$g_y(u,u) = \frac{4\,\|u\|^2}{\left(1+\|y\|^2\right)^2}.$$

Si $p=-1$, l'application f devient $f(x) = \frac{x}{||x||^2}$.
Il s'agit de montrer que $f^\star g = g$.
Par le point précédent, on a que $d_x f \cdot v = \frac{1}{||x||^2}\left(v - 2\frac{\langle x,v\rangle}{||x||^2}x\right)$. Donc:

$$(f^\star g)_{ij} = \frac{1}{||x||^4}\left(\frac{4\delta_{ij}}{(1+||y||^2)^2}\right) = \frac{4\delta_{ij}}{(1+||x||^2)^2}$$

où on a posé $||y|| = \frac{1}{||x||}$.

1.4. Fixons donc deux systèmes de coordonnées $x^1,\cdots,x^n$ et $y^1,\cdots,y^n$. On a donc deux expressions de la métrique

$$g = \sum_{ij} g_{ij}dx^i dx^j$$

et

$$g = \sum_{ij} \tilde{g_{ij}}dy^i dy^j$$

associées aux deux choix de coordonnées. Ces deux expressions sont reliées par la formule de changement de coordonnées des tenseurs vue en cours :

$$\tilde{g_{ij}} = \sum_{\nu\mu} g_{\nu\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^j}.$$

On reconnaît d'ailleurs la formule de changement de bases pour les formes quadratiques. Notons en effet A la matrice de terme général

$$a_i^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i}.$$

La formule de changement de coordonnées se réécrit de manière synthétique

$$(g_{\nu\mu}) =^t A(\tilde{g_{ij}})A.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_g(U) &= \int_U \sqrt{|\det(g_{\nu\mu})|}dx^1\cdots dx^n \\
&= \int_U \sqrt{|\det\,{}^tA(\tilde{g_{ij}})A|}dx^1\cdots dx^n \\
&= \int_U \det(A)\sqrt{|\det(\tilde{g_{ij}})|}dx^1\cdots dx^n.
\end{aligned}$$

On reconnaît la formule de changement de variable pour les intégrales ($\det(A)$ étant le jacobien du changement de variables). Ainsi

$$\mathrm{Vol}_g(U) = \int_U \sqrt{|\det(\tilde{g_{ij}})|}dy^1\cdots dy^n,$$

ce qu'on voulait.

1.5. (a) La métrique s'écrit matriciellement

$$g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'élément de volume

$$dv_g(x,y) = \frac{dxdy}{y^2}.$$

C'est avec cette mesure que l'on calcule une aire hyperbolique. Soit donc

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{H}^2 \ , \ 1 \leqslant x \leqslant a \ \text{ et } \ b \leqslant y\right\}.$$

Alors,

$$\int_T dv_g(x,y) = (a-1)\int_b^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{a-1}{b}.$$

On note que cette aire est finie pour la mesure de volume hyperbolique et infinie pour la mesure euclidienne. Cela vient du fait que la mesure hyperbolique contracte les longueurs des points loin de l'axe réel. Ainsi deux points de même ordonnée sur les droites verticales du triangle sont à distance euclidienne constante tandis qu'ils se rapprochant exponentiellement vite pour la distance hyperbolique.

(b) Montrons déjà qu'une telle application laisse le demi-plan supérieur invariant :

$$\Im f(z) = \Im\left(\frac{(a(x+iy)+b)(c(x-iy)+d}{|cz+d|^2}\right) = \frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2}$$

Puisque $ad-bc>0$, on conclut que $\Im f(z) > 0$. Montrons maintenant que f est une isométrie. Puisque f est clairement holomorphe, il est commode de raisonner en termes complexes. Cela facilite le calcul de la différentielle de f : $d_z f \cdot u = f'(z)u = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}u$. On rappelle aussi que $< u, v >= \Re(u\bar{v})$. Ainsi

$$\begin{aligned} (f^*h)_z(u,v) &= h_{f(z)}(d_z f\cdot u, d_z f \cdot v) \\ &= \frac{1}{(\Im f(z))^2}\Re(f'(z)u, f'(z)v) \\ &= \frac{|cz+d|^2}{(\Im z)^2(ad-bc)^2}\Re\left(\frac{(ad-bc)u}{(cz+d)^2}\overline{\left(\frac{(ad-bc)v}{(cz+d)^2}\right)}\right) \\ &= \frac{\Re(u\bar{v})}{(\Im z)^2} \\ &= h_z(u,v). \end{aligned}$$

(c) On fixe ξ et on résout l'équation en z,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \xi.$$

On trouve

$$f^{-1}(\xi) = \frac{d\xi - b}{-\xi c + a}$$

et $\xi \neq \frac{a}{c}$ car ξ ne peut être réel ($\Im\xi > 0$).

On remarque que si $ad-bc=1$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et si f est l'isométrie de $\mathbb{H}^2$ qui correspond à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors f^{-1} est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$.

(d) et (e)

i. Montrons tout d'abord que φ est à valeurs dans $\mathbb{H}^2$:

$$\begin{aligned}\Im\varphi(z) &= \Im\left(\frac{-i(x+iy+1)(x-iy-1)}{|z-1|^2}\right)\\ &= \cdots\\ &= \frac{1-x^2-y^2}{|z-1|^2} > 0\end{aligned}$$

car $x^2+y^2<1$.

ii. φ est holomorphe.

iii. L'équation $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$ conduit facilement à $z_1=z_2$ donc φ est injective.

iv. On montre que φ est surjective et on calcule son inverse en résolvant l'équation en z, $\varphi(z)=\xi$. On trouve

$$z=\varphi^{-1}(\xi)=\frac{1+i\xi}{i\xi-1}$$

et on constate au passage que l'inverse est holomorphe.

(f) On calcule φ^*h On rappelle qu'on a déjà calculé $\Im\varphi(z)$ et qu'on peut différentier φ comme une fonction holomorphe. On trouve tous calculs fais,

$$(\varphi^*h)_z(u,v)=\frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\Re(u\bar{v}).$$

On en déduit que

$$g_z=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}.$$