9 Mars 2021, semaine 3

Chap 3 : Géodésiques et Connexions

§3.1 Equations d'Euler–Lagrange

Motivation : On considère une fonctionnelle sur l'"espace des courbes", disons

$$\mathcal{P}_{a,b} = \{ \gamma : [0,1] \to M \mid \gamma(0) = a, \gamma(1) = b \}$$

la fonctionnelle est simplement une fonction

$$S : \mathcal{P}_{a,b} \to \mathbb{R}$$

et on cherche des conditions permettant de trouver le minimum

$$\min \{ S(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{P}_{a,b} \}$$

On aimerait une condition du type

$$\delta S = 0 \quad , \quad \delta = \text{"variation"}$$

(cette condition devrait déterminer un "point critique" de S, on dit aussi une "courbe extrémale")

Définitions

① Un <u>Lagrangien</u> sur une variété différentiable M est une fonction différentiable (C^1)

$$L : TM \to \mathbb{R}$$

où

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

(c'est une variété diff de dimension $2 \times \dim(M)$).

② On appelle <u>variation</u> d'une courbe $\gamma : [a,b] \to M$ une fonction

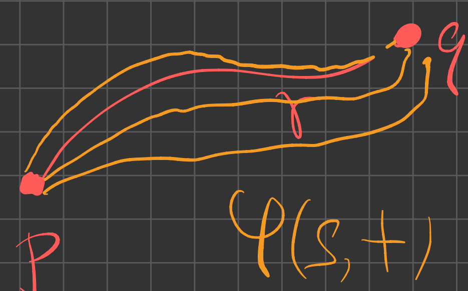
$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$$
$$(s, t) \mapsto \varphi(s,t)$$

telle que $\varphi(0,t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [a,b]$
(on note souvent $\gamma_s(t) = \varphi(s,t)$ ou γ pense comme une famille à un paramètre de courbes qui déforment γ)

③ La variation φ de γ est dite à extrémités fixes si

$$\varphi(s,a) = \gamma(a), \quad \varphi(s,b) = \gamma(b)$$

$\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$



④ L'action du lagrangien f sur la courbe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$S_f(\gamma) = \int_a^b f(\dot{\gamma}(t))\,dt \quad \in \mathbb{R}$$

(5) La courbe γ est <u>extrémale</u> par le lagrangien $\mathcal{L}$ si

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} S_{\mathcal{L}}(\gamma_s) = 0$$

par toute variation $\gamma_s(t) = \varphi(s,t)$ de γ à extrémité fixées.

<u>Remarque</u> Il est commode d'écrire la valeur du lagrangien $\mathcal{L}$ en un vecteur tangent $v \in T_p M$ par

$$\mathcal{L}(p, v) \quad (\text{au lieu de } \mathcal{L}(v))$$

Avec cette notation on écrira l'action

$$S_{\mathcal{L}}(\gamma) = \int_a^b \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\,dt$$

Théorème (Equations d'Euler-Lagrange)

Soit $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangien sur la variété différentiable M et soit $U \subset M$ le domaine de coordonnées $x^1, \ldots, x^n$. Alors la courbe $\gamma : [a,b] \to U$ de classe C^2 est extrémale par l'action $S_{\mathcal{L}}$ s.si

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}} \qquad i = 1, \ldots, n$$

où on a noté $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$

et $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t)) = (v^1(t), \ldots, v^n(t))$

Remarque Les physiciens notent souvent ces équations

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}$$

Preuve : Soit $\gamma_s(t) = \varphi(s,t) = (x^1(s,t), \dots, x^n(s,t))$ une variation à extrémités fixées de γ.

On note
$$v^i(s,t) = \frac{\partial x^i}{\partial t}(s,t).$$

Alors
$$\frac{d}{ds} S_f(\gamma_s) = \frac{d}{ds}\int_a^b f(x(s,t), v(s,t))\, dt$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v^i}\frac{\partial v^i}{\partial s}\right) dt$$

Mais
$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial v^i}\frac{\partial v^i}{\partial s}\, dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial v^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial s\, \partial t}\, dt$$
$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial v^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial t\, \partial s}\, dt$$

On peut alors intégrer par parties :

$$(\dots) = \left[\frac{\partial f}{\partial v^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial s}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial s} dt$$

On a supposé que la variation est à extrémités fixées $\Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial s} = 0$ si $t=a$ ou $t=b$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial s} dt = -\int_a^b \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i}\right) \frac{\partial x^i}{\partial s} dt$$

Donc

$$\frac{d}{ds}\left(S_f(\gamma_s)\right) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial s} dt$$

Donc si les équations d'E-L sont vérifiées alors

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} S(\gamma_s) = 0$$ pour toute variation à extrémités fixes

Réciproquement : Si les équations d'E-L sont vérifiées, alors γ est une extrémale de S_f en raison du "lemme fondamental du calcul des variations" (lemme de Dubois-Reymond)

Si $h : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue t.q.

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} h_i(t) \cdot w_i(t) \right) dt = 0$$

pour toute $w : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, continue tq. $w_i(a) = w_i(b) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$

(on applique ce lemme à $w_i = \dfrac{\partial x^i}{\partial s}$

et $h_i = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial v^i} - \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$)

#

---

§3.11 Action classique d'une particule de masse m

Déf On appelle lagrangien classique d'une particule de masse m sur une variété riemannienne (M, g) en présence d'un potentiel $u : M \to \mathbb{R}$ est la fonction $f : TM \to \mathbb{R}$

$$f(p,v) = \frac{m}{2} \cdot \|v\|^2 - u(p)$$

(où $\|v\|^2 = g_p(v,v)$). L'action associée est notée

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \left(\frac{m}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 - U(\gamma(t))\right)dt$$

où $\gamma : [a,b] \to M$ est la trajectoire de la particule. On veut trouver les trajectoire extrémale par $\mathcal{L}$.

Ecrivons Euler-Lagrange :

$$f(x,v) = \frac{m}{2}\, g_{ij}(x) v^i v^j - U(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v^\mu} = \frac{m}{2}\left(g_{i\mu}(x) \cdot v^i + g_{\mu j} v^j \right)$$

$$= m \cdot g_{i\mu} v^i$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^\mu} = \frac{d}{dt}\left(m\, g_{i\mu}(x)\, v^i\right)$$

$$= m\,\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial t}\cdot v^i + m\, g_{i\mu}\frac{\partial v^i}{\partial t}$$

$$= m\left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + g_{i\mu}\ddot{x}^i\right)$$

D'autre part

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{m}{2} g_{ij} v^i v^j - U(x)\right)$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial U}{\partial x^\mu}$$

Les équations d'Euler-Lagrange nous donnent :

$$\frac{m}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = m\left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + g_{i\mu}\ddot{x}^i\right)$$

On peut utiliser la symétrie

$$\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

et réécrire E-L de la façon suivante :

$$m\left(g_{i\mu}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{j\mu} + \partial_j g_{i\mu} - \partial_\mu g_{ij}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j\right) = -\partial_\mu u$$

(où $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$)

On introduit la notation :

$$\Gamma_{ij,\mu}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{j\mu} + \partial_j g_{i\mu} - \partial_\mu g_{ij}\right)$$

= Symbole de Christoffel de $1^{ère}$ espèce.

L'équation d'Euler - Lagrange s'écrit :

$$m\left(g_{i\mu}\ddot{x}^i + \Gamma_{ij,\mu}(x)\,\dot{x}^i\dot{x}^j\right) = -\partial_\mu U$$

$(\forall\ \mu = 1, \dots, n)$

On multiplie cette équation par les coefficients $g^{k\mu}$ de la matrice inverse de $g_{i\mu}$ ($\Rightarrow$ $g^{k\mu} g_{i\mu} = \delta^k_i$)

$\Rightarrow$

$$m\left(\ddot{x}^k + \sum_{\mu=1}^{n} g^{k\mu}\,\Gamma_{ij,\mu}(x)\,\dot{x}^i\dot{x}^j\right) = -\sum g^{k\mu}\frac{\partial U}{\partial x^\mu}$$

<u>Def</u> les <u>symboles</u> de <u>Christoffels</u> de 2er espèce :

$$\Gamma^k_{ij} = g^{k\mu}\Gamma_{ij,\mu} = \frac{1}{2} g^{k\mu}\left(\partial_i g_{j\mu} + \partial_j g_{i\mu} - \partial_\mu g_{ij}\right)$$

(on somme sur μ)

les équations cherchées sont donc

$$m\underbrace{\left(\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}(x)\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j\right)}_{\text{Accélération covariante}} = \underbrace{-g^{k\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu}}_{-\text{gradient de } u}$$

masse x accélération covariante = - gradient du potentiel.

<u>Déf</u> $\gamma : [a,b] \to \Omega$ est <u>géodésique</u> si son accélération covariante $= 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(x)\, \dot{x}^i \dot{x}^j = 0}$$

avec

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} g^{k\mu} \left(\partial_i g_{j\mu} + \partial_j g_{i\mu} - \partial_\mu g_{ij} \right)$$