Rappel : Une métrique riemannienne de classe C^k sur une variété différentiable M est la donnée pour chaque $p \in M$ d'un produit scalaire $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, qui varie de façon C^k, i.e. dans chaque carte (U, φ) de M on a que les fonctions suivantes sont C^k :

$$U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longmapsto g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

où $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ sont les dérivées partielles dans le système de coordonnées $x^1, \dots, x^n$ associées à la carte (U, φ) :

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (h) = \frac{\partial}{\partial x^i}(h \circ \varphi^{-1})(p)$$

<u>Remarque</u> Si on remplace la condition que (g_{ij}) est définie positive par la condition

$p \longmapsto g_p$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur T_pM

Alors on dit que g est une métrique <u>semi-riemannienne</u>, ou <u>pseudo-riemannienne</u> sur M.

Par le <u>théorème</u> de <u>Sylvester</u> de l'algèbre linéaire, on sait que en chaque point $p \in M$ il y a une base $e_1, \dots, e_m$ de T_pM tq.

$$g_p(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i = 1, \dots, k \\ -1 & \text{si } j = i = k+1, \dots, m \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et $(k, m-k)$ est la <u>signature</u> de g_p

Il n'est pas difficile de montrer que la signature ne dépend pas du point p si M est connexe.

Def Une métrique <u>Lorentzienne</u> est une métrique semi-riemannienne de signature est $(m-1, 1)$ (ou parfois $(1, m-1)$).

En relativité générale, on modélise l'espace temps par une variété Lorentzienne (de dim 4).

On a vu la notion de rappel (pull back) d'une métrique (semi)-riemannienne g sur N par l'immersion $f: M \to N$, noté $h = f^* g$

$$h_p(X_1, X_2) = (f^* g)_p(X_1, X_2) = g_{f(p)}(df_p(X_1), df_p(X_2))$$

puisque f est une immersion, i.e.

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N \text{ est injective } \forall p \in M$$

on a que

f^*g est bien une métrique (semi)-riemannienne (f^*g_p est non dégénéré)

<u>Def</u> Une application $f \in C^k(M, N)$ entre deux variétés riemanniennes (M, h), (N, g) est une <u>isométrie locale</u> si

$$h = f^*g$$

et f est

- Un <u>plongement isométrique</u> si, de plus f est un plongement, i.e. f est injective et
$$f : M \to f(M) \subset N$$
est un homéomorphisme.

· f est une isométrie globale si f est une immersion isométrique et un difféomorphisme ($\Rightarrow \dim(M) = \dim(N)$)

· $f : (M, h) \to (N, g)$ est une application conforme si il existe $u : M \to \mathbb{R}$, C^k

t.q.

$$h = e^{2u} \cdot f^* g$$

i.e.

$$h_p(X_1, X_2) = e^{2u(p)} g_{f(p)}(df_p(X_1), df_p(X_2))$$

$\Leftrightarrow$

$$\|X\|_h = e^u \|df(X)\|$$

Longueur de courbes et distances :

Def Soit $\gamma : I \to M$ une courbe de classe C^1 dans la variété riemannienne

(M, g) ($I \subset \mathbb{R}$ un intervalle)

La longueur de γ par g est

$$\ell(\gamma) = L(\gamma) = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt$$

(où $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)} M$ est le vecteur tangent associé à la dérivation $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$

$$X(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\gamma(t+\varepsilon)) - f(\gamma(t))}{\varepsilon} \Bigg)$$

La longueur est également bien définie par les courbes de classe C^1 par morceaux.

La distance riemannienne entre $p, q \in M$ est

$$d_g(p,q) = \inf \{ \ell(\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to M, \text{ continue, } C^1 \text{ par morceaux et tq } \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q \}$$

parfois on abrège :

$$d_g(p,q) = \inf \{ \ell(\gamma) \mid \gamma : p \rightsquigarrow q \}$$

Remarque : Si p, q n'appartiennent pas à la même composante connexe de M $\Rightarrow$

$$d_g(p,q) = \infty$$

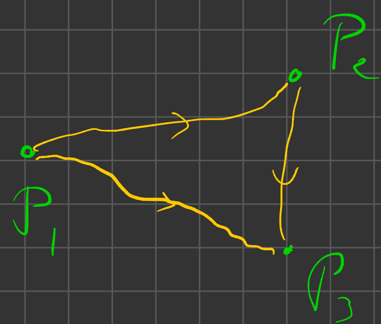
car $\inf \emptyset = +\infty$ $\quad (\sup \emptyset = -\infty)$

Prop : Si M est connexe, alors $d_g(\, , \,)$ est une métrique sur M. De plus la topologie induite par M coïncide avec la topologie de variété de M.

Remarques pour la preuve

① On a vu en exercice que d_g est une métrique. Un point délicat est que

$p \neq q \Rightarrow d_g(p,q) > 0$. L'inégalité du triangle utilise le fait qu'on travaille avec des chemins C^1 par morceaux



② Pour un chemin $\gamma : [0,1] \to U \subset M$ où U est le domaine d'un système de coordonnées $x^1, \dots, x^m$, on a

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

et

$$\ell(\gamma(t)) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\gamma(t)) \cdot \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t)}\, dt$$

$$= \int_0^1 \| \dot{\gamma}(t) \|_g \, dt$$

Pour prouver que la topologie induite par d_g coïncide avec la topologie de variété sur M.

Pour cela on peut se restreindre au domaine d'une carte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ (de M) et donc ne considérer que le cas d'un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$.

Soit donc un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ et une métrique riemannienne sur V. Quitte à restreindre cet ouvert on peut supposer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ t.q.

$$\boxed{C_1 \|v\|_e \leq \|v\|_{g,p} \leq C_2 \|v\|_e} \quad \forall p \in M$$

où $\|v\|_{g,p} = \sqrt{\sum g_{ij}(p) v^i v^j} = \sqrt{g_p(v,v)}$

= norme Riemannienne

et $\|v\|_e = \sqrt{\sum_i (v^i)^2}$ = norme euclidienne.

Ceci implique que pour tout chemin C^k par morceaux $\gamma : I \to V$ on a

$$c_1 \ell_e(\gamma) \leq \ell_g(\gamma) \leq C_2 \ell_e(\gamma)$$

où ℓ_e = longueur euclidiene.

Donc

$$B_e(x, \tfrac{\varepsilon}{C_2}) \subset B_g(x, \varepsilon) \subseteq B_e(x, \tfrac{\varepsilon}{c_1})$$

$\forall x \in V$ et $\forall \varepsilon > 0$, suffisement petit

Cela implique que d_g et d_e induisent la même topologie sur V, or la topologie sur $V \subset \mathbb{R}^n$ induite par d_e est la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$

#

Quelques Théorèmes

Théorème Myers–Steenrod (1939)

Pour une bijection $f : (M, g) \to (M, g)$ de classe C^3 les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $d_g(f(p), f(q)) = d_g(p, q)$, $\forall p, q \in M$

(b) $f^* g = g$ $\left(\Leftrightarrow \|df(X)\|_g = \|X\|_g\right)$

lorsque c'est le cas on a une isométrie $f : (M, g) \to (M, g)$ et $f : (M, d_g) \to (M, d_g)$

De plus

$$\mathrm{Isom}(M, g) = \{ f : M \to M \mid f \text{ isométries} \} \subset \mathrm{Diff}(M)$$

est un groupe de Lie de dimension $\leq \frac{1}{2} n(n+1)$

<u>Remarque</u> Dans certain cas on égalité:

Si $M = S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n,$ alors

$$\dim(\mathrm{Iso}(M)) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

(par ex. $\mathrm{Iso}(S^n) = O(n+1)$)

<u>Théorème de plongement de Nash</u> (1954)

Toute variété riemanienne se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^d$ (avec d assez grand).

(i.e. il existe $f : M \to \mathbb{R}^d$ t.q. $f : M \to f(M) \subset \mathbb{R}^d$ est un difféo. et

$$g_p(X,Y) = \langle df_p(X), df_p(Y)\rangle_{\mathbb{R}^d}.)$$

Théorème Toute variété différentiable M admet une métrique riemannienne.

Preuve On peut se donner un atlas de M, $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ qui est localement fini, ceci implique qu'il existe une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{A}$, i.e. une collection

$$\eta_i \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad \text{t.q.}$$

1) $\mathrm{supp}(\eta_i) = \overline{\{p \in M \mid \eta_i(p) \neq 0\}} \subset U_i$

2) $0 \leq \eta_i(p) \leq 1$, $\forall i \in I$, $\forall p \in M$

3) $\sum_{i \in I} \eta_i(p) = 1 \quad \forall p \in M$

On se donne maintenant une métrique

quelconque sur U_i (pour tout i) et on note g_i

(par exemple $g_i = \varphi_i^*$(métrique euclidienne)

i.e. $(g_i)_{\mu\nu} = g_i\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \delta_{\mu\nu}$)

On définit alors une métrique riemannienne globale sur M par ($\forall p \in M$, $X, Y \in T_pM$)

$$g_p(X,Y) = \sum_{i\in I} \eta_i(p)\, g_i(X,Y)$$

cette métrique est bien définie et est définie positive en tout p

#