4.1. Prouver que pour toute connexion ∇ sur une variété M, l'application

$$\begin{array}{rccl} T: & \Gamma(M)\times\Gamma(M) & \longrightarrow & \Gamma(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{array}$$

est un tenseur sur M, c'est-à-dire qu'elle bilinéaire sur l'anneau $\mathcal{C}^\infty(M)$.

4.2. Soit (M,g) une variété riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Montrer la formule de Koszul :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X\cdot g(Y,Z) + Y\cdot g(Z,X) - Z\cdot g(X,Y) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z,],X)$$

En déduire une autre preuve de l'existence et l'unicité de ∇.

4.3. Démontrer le lemme 3.2.4 du polycopié.

4.4. Soit (M,g) une variété riemannienne et $\gamma : [0,1]\to M$ une courbe lisse quelconque.

(a) Montrer que si ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g alors, pour tout couple de champs parallèles $X, Y \in \Gamma_\gamma$, $g(X,Y)$ est constant le long de γ.

(b) En déduire que P_t est une isométrie de $T_{\gamma(0)}M$ sur $T_{\gamma(t)}M$ puis qu'il existe des champs de vecteurs qui forment une base orthonormée en tout point et qui sont parallèle le long de γ.

(c) Soit X un champs parallèle le long de γ. Montrer que ses coordonnées dans un repère du type précédent sont constantes.

(d) On suppose maintenant que M est de dimension 2. Montrer que γ est une géodésique si et seulement si $\|\dot\gamma\|$ est constante et si $\|X\|$ et $\angle(X,\dot\gamma)$ sont constants le long de γ pour tout champ parallèle X.

4.5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et soit

$$\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

un plongement lisse. On munit la sous-variété $M = \psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ de la métrique riemannienne induite par la métrique usuelle de $\mathbb{R}^n$. On note $u^1,\dots,u^k$ les coordonnées sur M associées à la carte ψ^{-1}. On peut alors représenter la base associée de l'espace tangent en un point $p=\psi(u)$ de M par les vecteurs "concret"

$$\xi_i = \psi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial u^i} \quad (i=1,\dots,k)$$

Montrer que les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée sont reliés aux composantes tangentielles des dérivées seconde de ψ de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u_i \partial u_j}\right)^\top = \sum_k \Gamma^k_{i,j}\xi_k.$$

4.6. Géodésiques dans les modèles de courbures constantes

(a) Quelles sont les géodésiques de l'espace euclidien ?

(b) i. Les coordonnées sphériques de la sphère $\mathbb{S}^2$ sont données par l'application

$$(x, y, z) = (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$$

Exprimer la métrique ronde de $\mathbb{S}^2$ dans ces coordonnées. Puis calculer les symboles de Christoffel. En déduire enfin que les méridiens $((\theta(t), \varphi(t) = (\theta_0, t))$ sont des géodésiques.

ii. On s'intéresse maintenant au cas général de la sphère ronde $\mathbb{S}^n$. Soit

$$\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_{n+1}(t))$$

une géodésique partant du pôle nord et de vitesse initiale $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Montrer que cette géodésique est un grand cercle. En déduire une description de toutes les géodésiques de la sphère.

Indication : On pourra utiliser le fait que le groupe d'isométries de la sphère $\mathbb{S}^n$ est le groupe $O_{n+1}(\mathbb{R})$.

(c) On cherche maintenant les géodésiques du $\frac{1}{2}$-plan de Poincaré muni de la métrique hyperbolique.

i. Donner deux preuves du fait que les courbes de la forme

$$\gamma(t) = (x_0, e^{at})$$

sont des géodésiques.

ii. On appelle "cercle généralisé" une courbe de $\mathbb{R}^2$ qui est soit une droite, soit un cercle. Montrer que le groupe des homographies

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

envoie tout cercle généralisé sur un cercle généralisé.

iii. Montrer aussi qu'une homographie conserve les mesures des angles.

iv. En déduire que les géodésiques du plan hyperbolique sont des droites verticales ou des demi-cercles orthogonaux au bord, paramétrés à vitesse constante.