Cours du 16 mars

§ 3.2 Connexions

Motivation À un champ de vecteurs X sur la variété M on associe une dérivation de $C^\infty(M)$

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$f \longmapsto X(f) = df(X)$$

(c'est la dérivée de la fonction f en direction de X).

But On aimerait maintenant définir la dérivée d'un champ de vecteurs Y en direction de X (et même la dérivée de tout champ de tenseurs).

<u>Idée</u> : On écrit en coordonnées $Y = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

et on pose

$$X(Y) = \sum_{j=1}^{n} X(b^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

<u>Problème</u> : ça ne marche pas, cette formule n'a pas de bon comportement lorsqu'on change de système de coordonnées

En fait : il n'y a pas de notion générale de dérivation d'un champ de vecteurs en direction

d'un autre sur une variété différentiable générale.
Pour cette définition on a besoin d'introduire une structure supplémentaire sur la variété : c'est la notion de <u>connexion</u>.

<u>Déf</u> Soit M une variété C^∞, on note $\Gamma(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur M.
Une <u>connexion</u> sur M (au sens de Koszul) la donnée d'une application

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M)$$
$$X, Y \longmapsto \nabla_X Y$$

vérifiant les propriétés :

1) ∇ est $C^\infty(M)$-linéaire en la première variable :

$$\nabla_{(aX_1+bX_2)}(Y) = a\nabla_{X_1}Y + b\nabla_{X_2}Y$$

$\forall\, a,b \in C^\infty(M)$

2) ∇ est $\mathbb{R}$-linéaire en la seconde variable :

$$\nabla_X(aY_1+bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$$

$\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ (des constantes)

3) Ou la règle de Leibniz :

$$\nabla_X (f Y) = f \nabla_X Y + X(f) \cdot Y$$

Terminologie Si ∇ est une connexion sur M et si $X, Y \in \Gamma(M)$, alors $\nabla_X Y \in \Gamma(M)$ est la dérivée covariante de Y en direction de X (pour la connexion ∇)

Expression explicite de $\nabla_X Y$ en coordonnées

Soit $x^1, \dots, x^n$ un système de coordonnées locales sur un ouvert U alors on note

$$\boxed{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(x) \frac{\partial}{\partial x^k}}$$

<u>Définition</u> : Les n^3 fonctions $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ s'appellent les <u>symboles de Christoffel</u> de ∇ dans le système de coordonnées $x^1, \dots, x^n$. Ce sont donc les coefficients de la connexion.

<u>Problème</u> : Calculer $\nabla_X Y$ dans la base $\frac{\partial}{\partial x^k}$ lorsque $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Solution:

$$\nabla_{a^i \partial_i} (b^j \partial_j) = a^i \nabla_{\partial_i} (b^j \partial_j)$$

$$= a^i \left(\partial_i (b^j) \partial_j + b^j \nabla_{\partial_i} \partial_j \right)$$

$$= a_i \left(\frac{\partial b^j}{\partial x^i} \partial_j + b^j \Gamma^k_{ij} \partial_k \right)$$

$$= a_i \left(\frac{\partial b^k}{\partial x^i} \partial_k + b^j \Gamma^k_{ij} \partial_k \right)$$

$\Rightarrow$

$$\nabla_{a^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j,k} \left(a_i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + a_i b_j \Gamma^k_{ij} \right) \partial_k$$

$$= \sum_k C_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

avec

$$C_k = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k a^i b^j \right)$$

Remarque : On a en fait :

$$X(b^k) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial b^k}{\partial x^i}$$

On peut donc aussi écrire :

$$\nabla_X Y = \left(\sum_k X(b^k) + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k a^i b^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

<u>Conséquences</u> : ① la connexion ∇ est déterminée par la donnée des symboles de Christoffel (dans tout système de coordonnées, ou dans un atlas)

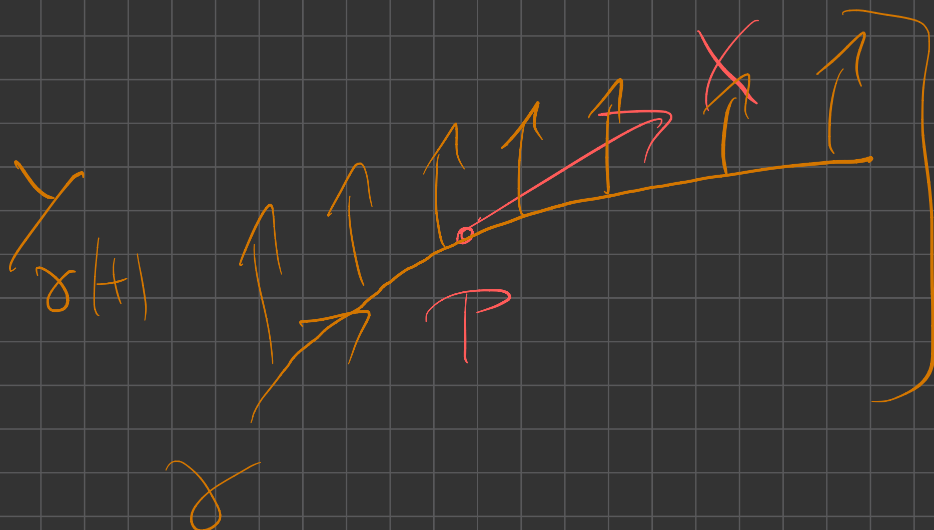
② $\nabla_X Y$ est déterminé localement (car la formule précédente est locale)

③ Plus précisément, $\nabla_X Y$ est déterminé (en $p \in M$) par (i) la donnée de X en p

(ii) la donnée de Y le long d'une courbe γ qui représente X en p.

(i.e. $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X_p \in T_p M$

alors $X(b^k) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} b^k(\gamma(t))$)



Ces données déterminent $\nabla_X Y$ (au point p)

<u>Définition</u> Si ∇ est une connexion sur M

on dit que

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

est la <u>torsion</u> de ∇.

(2) ∇ est <u>sans torsion</u> ou <u>symétrique</u> si

$$T(X,Y) = 0 \quad , \quad \forall\, X, Y \in \Gamma(M)$$

<u>Lemme</u> ∇ est symétrique ssi dans tout système de coordonnées, on a $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$

<u>Preuve</u> Vient du fait que $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$

donc

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i$$

$$= \sum_k \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right) \partial_k \qquad \#$$

__Exercice__ la torsion définit un champ de tenseurs de type $(1,2)$. En d'autres termes

$$T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M)$$

$$X, Y \longmapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

est $C^\infty(M)$-bilinéaire en X et Y.

(__Remarque__ Observer que $T(X,Y) = -T(Y,X)$)

<u>Théorème</u> (Lemme fondamental de la géométrie (semi-) riemannienne).

Soit (M, g) une variété semi-riemannienne. Alors il existe une connexion unique ∇ telle que

(i) ∇ est symétrique $\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \right)$

(ii) ∇ est <u>compatible</u> avec g

$$\boxed{X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)}$$

<u>Def</u> Cette condition s'appelle la connexion de Levi-Civita (ou connexion canonique) de (M, g)

Preuve : On se donne un système de coordonnées $x^1, \dots, x^n$ et on pose $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$

la symétrie signifie

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \qquad (\forall\, i,j,k = 1, \dots, n)$$

la compatibilité de ∇ avec g entraîne que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jk}) = \frac{\partial}{\partial x^i} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

$$= g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) + g(\partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_k)$$

$$= \Gamma_{ij}^m g(\partial_m, \partial_k) + \Gamma_{ik}^m g(\partial_j, \partial_m)$$

i.e.

$$(a) \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma^m_{ij}\, g_{m,k} + \Gamma^m_{ik}\, g_{jm}$$

(identité de Ricci)

de même

$$(b) \quad \partial_j g_{ik} = \Gamma^m_{ji}\, g_{mk} + \Gamma^m_{jk}\, g_{im}$$

$$(c) \quad \partial_k g_{ij} = \Gamma^m_{ki}\, g_{mj} + \Gamma^m_{kj}\, g_{im}$$

Maintenant on considère $(a)+(b)-(c)$

(et on utilise que $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$ et $g_{ab} = g_{ba}$)

alors on obtient

$$(*) \quad 2\, g_{mk}\, \Gamma^m_{ij} = \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)$$

(le terme de droite est aussi un "symbole de Christoffel de 1ère espèce : $\Gamma_{i,j,k}$)

Maintenant on multiplie (*) par le coefficient g^{lk} et en faisant la somme sur k et en utilisant que

$$g^{lk} \cdot g_{mk} = \delta^{l}_{m} \qquad \left((g^{lk}) = (g_{mk})^{-1} \right)$$

On obtient

$$(**) \qquad \Gamma^{l}_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij} \right)$$

Cette formule prouve l'unicité de la connexion cherchée ∇ car ∇ est déterminée par les Γ_{ij}^{k} et cette formule prouve que les Γ_{ij}^{k} sont déterminés par (g_{ij}) et $\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$

Pour l'existence, on définit Γ_{ij}^{k} par $(**)$ dans tout système de coordonnées. On vérifie que cela définit une connexion et qu'elle vérifie les conditions (i) et (ii), i.e ∇ est symétrique et compatible avec (g).

#

Définition Si $\gamma : I \to M$ est une courbe C^1 et ∇ est une connexion sur M, alors l'accélération covariante par ∇ de γ est

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma$$

On a vu que ce champ de vecteurs le long de γ est bien défini, en coordonnées on a

$$\dot\gamma(t) = (\dot x^1, \dots, \dot x^n) \quad \text{si} \quad \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

$$\Rightarrow \quad \dot\gamma(t) = \sum_i \dot x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Alors

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla_{\dot x^i \partial_i}\left(\dot x^j \partial_j\right) = \dot x^i \partial_i\left(\dot x^j\right)\partial_j + \Gamma^k_{ij}\dot x^i \dot x^j \partial_k$$

Mais $\sum_{i=1}^{n} \dot x^i \partial_i\left(\dot x^j\right) = \ddot x^j$

$$\Rightarrow \quad \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \ddot x^j \partial_j + \Gamma^k_{ij}\dot x^i \dot x^j \partial_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\ddot x^k + \Gamma^k_{ij}\dot x^i \dot x^j\right)\partial_k$$

(accélération covariante en coordonnées) en particulier

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \iff \ddot{x}^k + \sum_{i,j}^{n} \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (\forall k)$$

On retrouve l'équation des géodésiques, sous une forme intrinsèque (sans coordonnées)

<u>Def</u> $\gamma : I \to M$, (courbe C^2) est

<u>géodésique</u> si

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$