EE206 Systèmes de mesure

Module 1: Approche statistique de la mesure

Dr J.-M. Fürbringer

Faculté des Sciences de base

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

March 20, 2021

1. La méthode scientifique

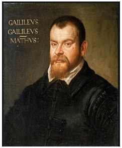
1.1 Acquis d'apprentissage du chapitre

A la fin de cette leçon, vous devez être capable d'expliquer

1. De comprendre les concepts statistiques nécessaires à une gestion scientifique d'un processus de mesure
2. De réaliser une analyse visuelle de données issues d'une mesure
3. De réaliser les calculs d'intervalles de confiance pour des résultats expérimentaux primaires et secondaires

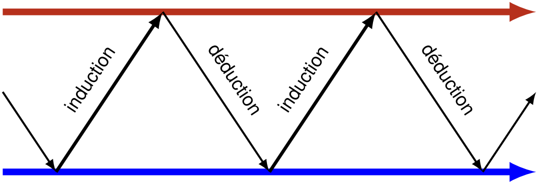
1.2 Origine de la science expérimentale

- Aristote (384-322 ac) est considéré comme l'inventeur de la méthode scientifique comme processus logique
- Ibn al-Haytham (965–1039) est l'inventeur de la science expérimentale.
- Un long processus avec plusieurs acteurs tels que Huygens, Ticcho Brahé, Hooke, Galilée et Keppler qui l'affineront à la Renaissance
- Pour Galilée, les vérités de la science doivent se confirmer expérimentalement. Les syllogismes de la science antique ont des prémices incomplètes et ne permettent pas des conclusions sûres.
- Par exemple, la théorie des corps pesants et des corps légers d'Aristote ne tient pas compte de la résistance de l'air.
- Aboutissement avec la théorie du phénomène et du noumène développé par Emmanuel Kant (1724-1804) au XVIIIème siècle et Karl Poper (1902-1994) XXème siècle.



1.3 Expérience vs théorie

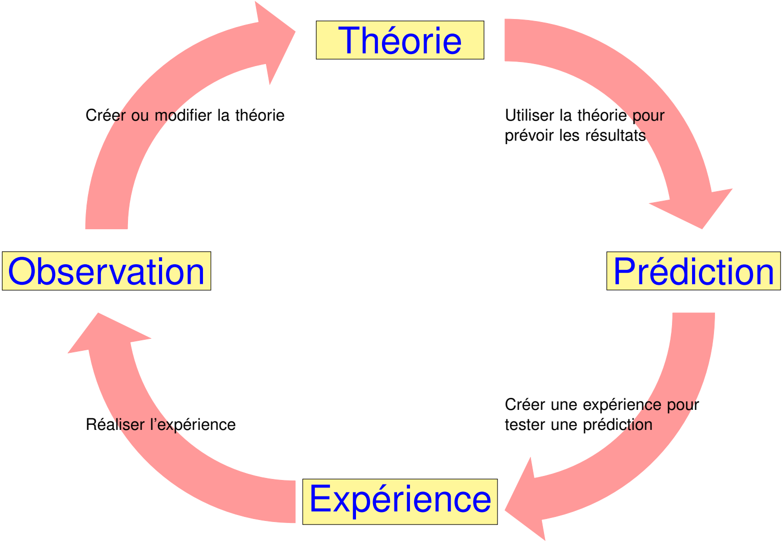
Hypothèses (conjecture, modèle, théorie)



Data (mesures, phénomène)

from E. G. P. Box, *Statistics for experimenters*, Wiley, 2nd ed., 2005

1.4 La méthode scientifique



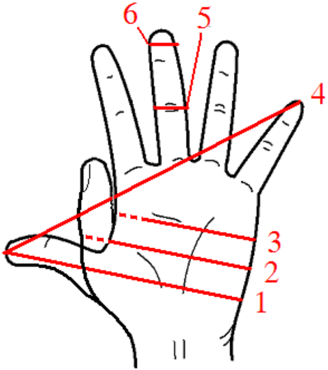
1.5 Le rasoir de Ockham [1]

- **De deux modèles prédisant le même résultat, on va choisir le plus simple**
- Approche empirique

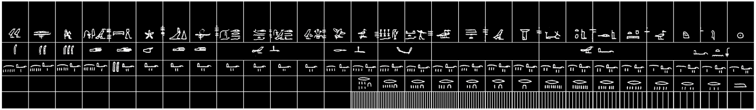
2. Le système d'unités

2.1 La main comme référence universelle

1. Pes manualis [2]
2. Main [3]
3. Palme
4. Empan
5. Doigt
6. Digit (en)



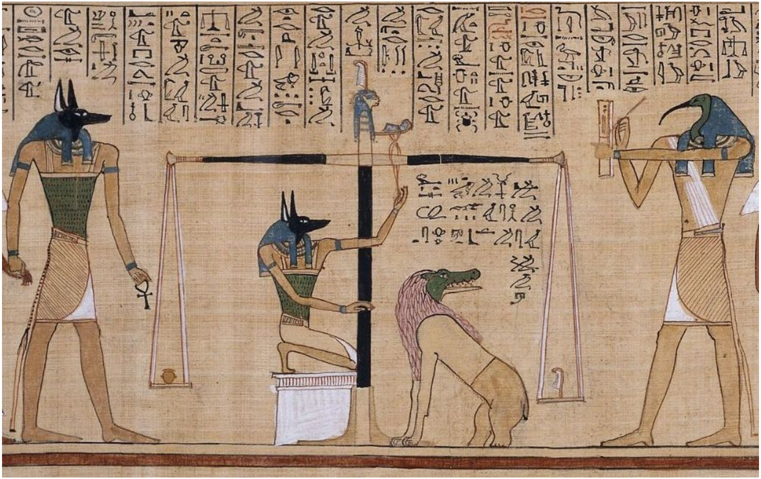
2.2 La coudée (Cubit) égyptienne



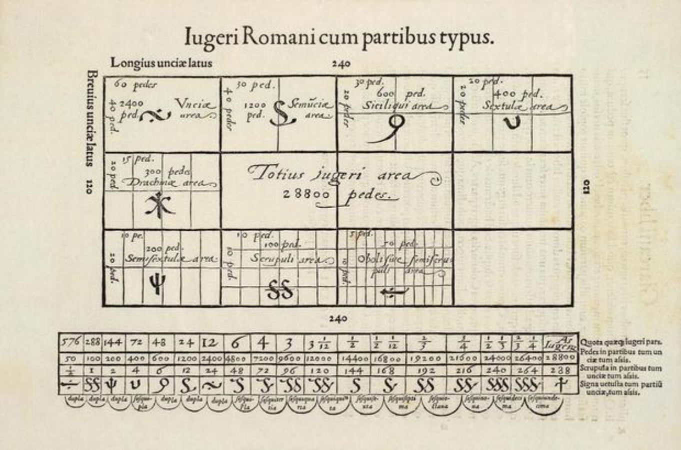
Cubit rod of the Turin Museum

La coudée est une unité de longueur vieille de plusieurs milliers d'années. Elle a comme base la longueur allant du coude jusqu'à l'extrémité du majeur. C'est la coudée, dite naturelle, de vingt-quatre doigts (= six paumes ou $1\frac{1}{2}$ pied). Sa longueur varie suivant les régions et les époques: le même nom recouvre des réalités très diverses.

2.3 La pesée de l'âme



2.4 La jugère romaine



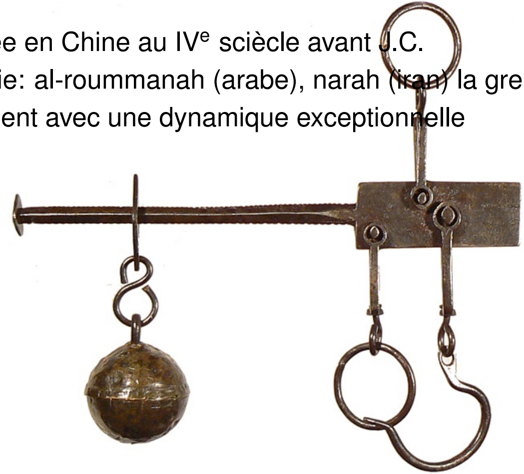
La jugère romaine et ses divisions. Bois gravé tiré de la première édition du traité de Glaréan sur les unités de mesures et monnaies dans l'empire romain et à l'époque moderne, Liber de asse, & partibus eius, Bâle, 1550 (Bibliothèque nationale suisse).

2.5 La balance romaine - Quintalier

Déjà utilisée en Chine au IV^{e} sciècle avant J.C.

Ethymologie: al-roummanah (arabe), narah (iran) la grenade

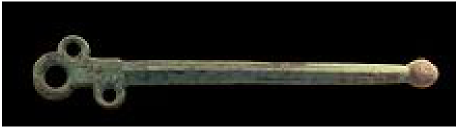
Un instrument avec une dynamique exceptionnelle

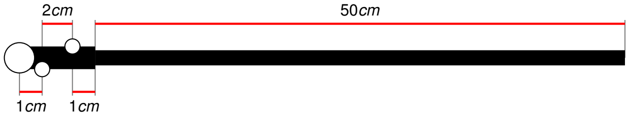


La balance romaine - Exercice

Soit une balance romaine dont l'élément central est présenté dans la figure ci-jointe,

- Le fléau a une longueur $f = 50cm$ sur l'entier duquel le contre-poids peut être déplacé.
- Le centre de chacune des trois boucles pour le bassin et les deux points de suspension est placé à respectivement 4, 3 et 1 cm de l'extrémité du fléau.
- La balance dispose de 2 contrepoids de 100 et 500 grammes.
- Quelle est la pesée minimale, respectivement maximale, que l'on peut effectuer avec cette balance.
- Quel est leur rapport?





L'équilibre des moments peut s'écrire $P \cdot f = M \cdot b$ avec P le contre-poids, M la masse à peser, f la distance entre le point de suspension et le contre-poids, b la distance entre le point de suspension et le bassin. Donc

$$M = P \cdot \frac{f}{b}$$

On cherche le maximum de poids mesurable

$$max(M) = max\left(P \cdot \frac{f}{b}\right) = max(P) \cdot \frac{max(f)}{min(b)} \approx 0.5 \times \frac{53}{1} = 26.5kg$$

De la même manière, le minimum de poids mesurable

$$min(M) = min\left(P \cdot \frac{f}{b}\right) = min(P) \cdot \frac{min(f)}{max(b)} \approx 0.1 \times \frac{1}{3} = 0.033kg$$

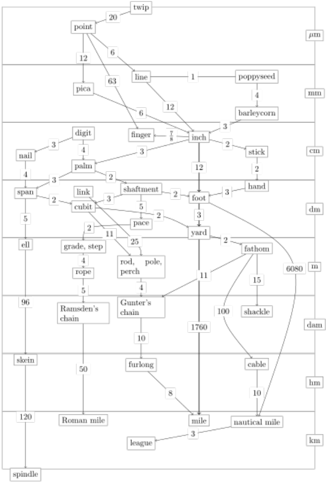
Le rapport max/min est donc $R \approx 26.5 \times 30 = 795$

2.6 Système de mesure - ancien régime

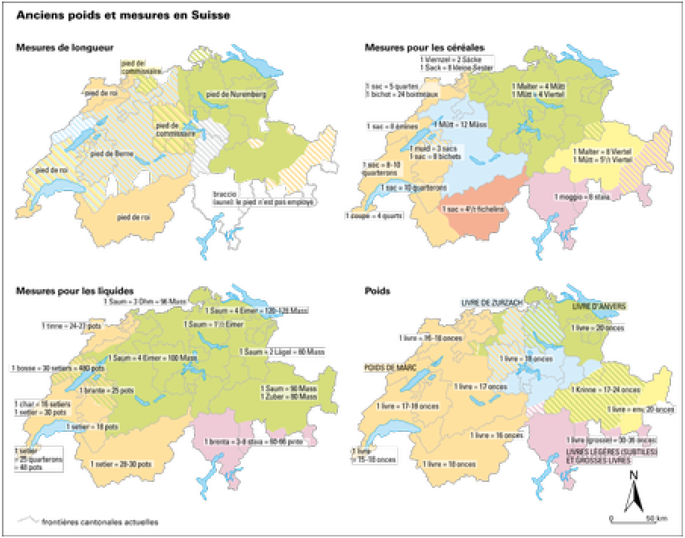
- 1 toise = 6 pieds
- 1 pied = 12 pouces
- 1 pouce = 12 lignes
- 1 ligne = 12 points
- 1 pied cube = 36 pintes
- 1 livre de poids de marc = 128 gros
- 1 pile de Charlemagne = 25 livres

- les étalons changent dans chaque fief selon le bon vouloir du seigneur
- environ 200 000 mesures différentes en 1789 au moment des Etats Généraux
- la situation est comparable dans le reste du monde

2.7 Ancien système de mesure anglais - avant 1824



2.8 Situation en Suisse avant 1875



2.9 Résumé Antiquité et Moyen-âge

- Dans l'antiquité, le processus de mesure des distances, des surface, des poids, des volumes est une opération courante. Les grandes civilisation ont des systèmes cohérents.
- Les romains sont très bien organisés sur ce sujet. Leur système est cohérent arithmétiquement avec des fractions duodécimales (base de 12)
- A la chute de l'empire romain on observe une grande dispersion régionale et grémiale:
  - Mesure/étalon par produit, par matière
  - un même nom correspond à des étalons différents (la livre de poids de marc, la livre d'Anvers)
  - La cohérence arithmétique de perd
  - Dans le droit féodal, la régulation des poids et mesures est un attribut seigneurial
  - la dominance commerciale de certaine région, de certains marchés influence les us et coutumes

2.10 Une demande dans les cahiers de doléances

- « Il faudrait dans le royaume qu'un seul et une seule mesure, mais que de difficultés se présentent pour y parvenir ! »
- « Il y a une infinité de mesures différentes parmi les seigneurs. L'on demande que toutes les mesures soient réduites à celles du roi. »

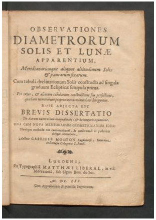

Cahier de doléances
Nous tous habitants

2.11 Les savants demandes un système décimal

- **Simon Stevin** (1548-1620) propose, dans son livre *la Disme* (1585), de compter avec des regroupements de 10 en 10, pour simplifier le système des fractions alors en usage (on utilise pas encore la virgule): $1\frac{1}{4}$ devient 1⓪2①5② [a].
- **d'Alembert** dans l'encyclopédie écrit en 1754 « *Il serait à souhaiter que toutes les divisions, par exemple de la livre, du sou, de la toise, du jour, de l'heure, etc., fussent de dix en dix.* »
- Le **dollar** est en 1785 la première monnaie basée sur le système décimal: 1\$ $=$ 100 cents

[a] Stevin est aussi l'inventeur de la notation $\vec{AB}$

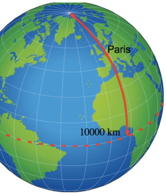
2.12 Et un système d'unité universelle


OBSERVATIONES
DIAMETRORUM
SOLIS ET LUNÆ
APPARENTIUM,
BREVIS DISSERTATIO
LUGDUNI,


MISVRA
VNIVERSALE
OVERO TRATTATO
NEL QVAL SI MOSTRA
come in tutti li Luoghi del Mondo si può trouare
una MISVRA, & un PESO VNIVERSALE
senza che habbiano relazione con niun'altra MISV-
RA, e niun altro PESO, & adogni modo in
tutti li luoghi saranno li medesimi, e saranno
inalterabili, e perpetui sin tanto che
durerà il MONDO.
DI TITO LIVIO BVRATTINI
La Misura si può trouare in un hora di tempo
e questa ci mostra quanto graue deu'essere
il PESO
IN VILNA
Nella stamperia de Padri Francescani
L' Anno M.DCLXXV.

- **Gabriel Mouton** (1618-1694) dans son livre *Observaciones diametrorum solis et lunae* (1670) propose
  - d'adopter une mesure universelle
  - de prendre comme référence la circonférence de la terre (1 virga $\approx$ =1.8m=$\frac{1}{1000}$ de minute de la circonférence de la terre)
  - d'utiliser un système décimal (centuria, decuria, virga, vigula, decima, centesima, millesima)
- **John Wilkins** (1614-1672) dans son livre *An Essay towards a Real Character and a Philosophical Language* publié en 1668 propose une mesure universelle, d'unités décimales, basée sur le principe d'un pendule battant une seconde, ainsi qu'un langage universel.
- **Tito Livio Burattini**(1617-1681) affine encore le concept dans son ouvrage *Misura universale* de 1675 en proposant le *metro catolico* comme unité de longueur une unité de poids basée sur un volume d'eau.

2.13 Système métrique décimal (1799)



Système parce qu'il y a une relation entre les différentes unités

- $m \rightarrow m^2 \rightarrow m^3$
- $m^3 + eau \rightarrow kg$
- $kg + argent \rightarrow franc$

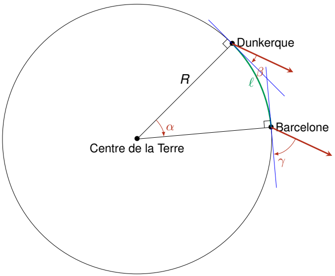
Métrique parce qu'il est basé sur une référence universelle:

- $1m = \frac{1}{10'000} \frac{1}{4}$ du méridien de Paris
- basé sur la mesure géodésique et astronomique de Dunkerque à Barcelone.

Décimal Parce que les sous-unités sont des puissances de dix.

Mais Le SMD n'englobe pas les angles et le temps. Le système métrique est adopté mondialement en 1875.

2.14 Le mètre et le méridien

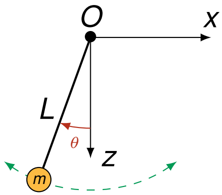


On vise une même étoile fixe. L'angle α entre le rayon de Dunkerque et celui de Barcelone est égal à la différence $\gamma - \beta$. Donc

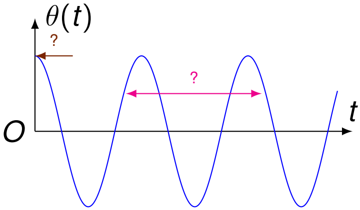
$$L = \frac{\pi}{2} \frac{\ell}{(\gamma - \beta)} \tag{2.1}$$

Mesure de la distance entre Dunkerque et Barcelone par triangulation par Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain entre 1792 et 1798.

2.15 Comment mesurer une seconde?

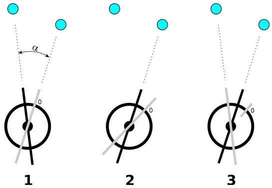


[scale=0.6]



- Pulsation d'un pendule: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$
- Période: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
- Période d'un pendule de $1m$: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \approx 2.006$
- 1 seconde correspond à une demi période d'un pendule de 1 mètre
- Est-ce que l'angle de départ a de l'importance?
- Qu'est-ce qu'un oscillateur isochrone?
- Comment améliorer la précision de la mesure de la période?

2.16 Cercle répétiteur: mesurer un angle



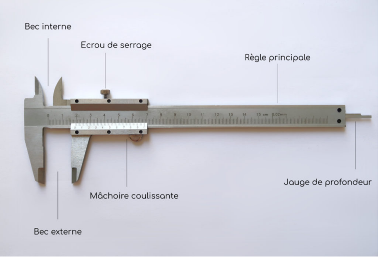
- Aligner l'instrument pour que son plan d'utilisation passe par les 2 points visés,
- Diriger chaque lunette sur un point,
- Verrouiller les deux lunettes en position sur le cercle
- Faire tourner l'ensemble « cercle et lunettes » pour viser le point de droite avec la lunette inférieure (noire)
- Déverrouiller la lunette supérieure grise et lui faire viser le point de gauche.

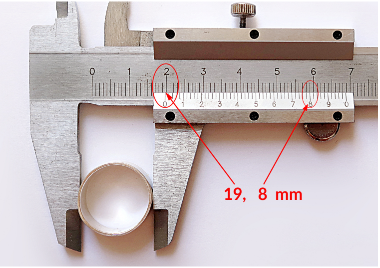
On mesure l'angle 2α. Si on répète deux fois le processus, on obtient l'angle 4α. Etc. Le résultat du cumul des « mesures » de l'angle sera alors divisé par le nombre d'itérations. Plus il y aura de répétitions, plus le résultat sera exact.

2.17 Les développements de Tycho Brahe

Quelle: Deutsche Fotothek

2.18 Précision sur un pied à coulisse

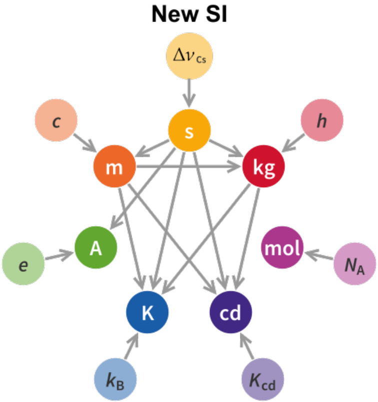




- La mantisse est lue sur la règle principale
- les dixièmes sont lus sur l'échelle secondaire en identifiant l'occurrence de deux échelons

2.19 Système d'unités

- **MKSA** : mètre, kilogramme, seconde, ampère
- **SI**: mètre, kilogramme, seconde, ampère, *Kelvin, mol, candela*

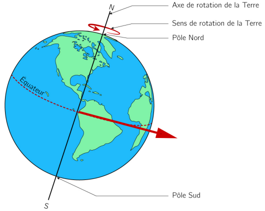


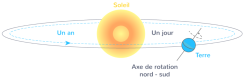
2.20 Définition de la seconde?

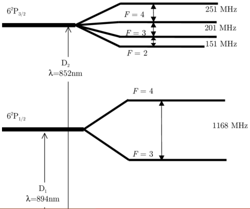
- La seconde, symbole *s*, est l'unité du temps du SI
- Elle a d'abord été définie comme la fraction $1/84600$ du jour solaire terrestre moyen (1889)
- En 1956, elle a été basée sur la révolution de la Terre autour du Soleil et définie comme la fraction 1/31 556 925,974 7 de l'année tropique 1900
- Depuis 1967, elle est définie à partir de $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$ la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133, égale à 9 192 631 770 Hz, unité égale à s^{-1}:

$$1\ \mathrm{s} = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}$$

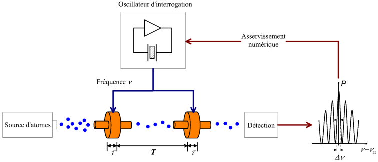
- Exactitude allant jusqu'à la 14 ème décimale (10^{-14})
- Obtenue à partir d'horloges atomiques à jet de césium

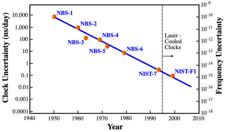






2.21 Fonctionnement d'une horloge atomique

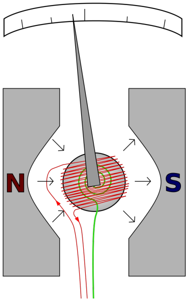




- Un gaz d'atomes froids est éjecté vers le haut pour former un jet.
- Ceux-ci sont alors triés pour qu'il ne reste plus que ceux dans l'état de plus basse énergie.
- Durant leur trajectoire de chute libre, ils passent par une cavité résonante où règne une onde électromagnétique . Plus la fréquence de l'onde est proche de la fréquence de transition du type d'atome considéré, plus la probabilité de passage pour les atomes vers le niveau de plus haute énergie est grande(résonance).
- A la sortie de la cavité, on mesure le nombre d'atome dans cet état (après les avoir séparés de ceux toujours dans l'état de basse énergie).
- On ajuste la fréquence de l'onde pour maximiser ce nombre d'atomes: on obtient un système d'asservissement qui amène la fréquence de l'oscillateur produisant l'onde très proche de la résonance. Cette fréquence, est alors utilisée pour mesurer le temps.

2.22 Définition de l'ampère

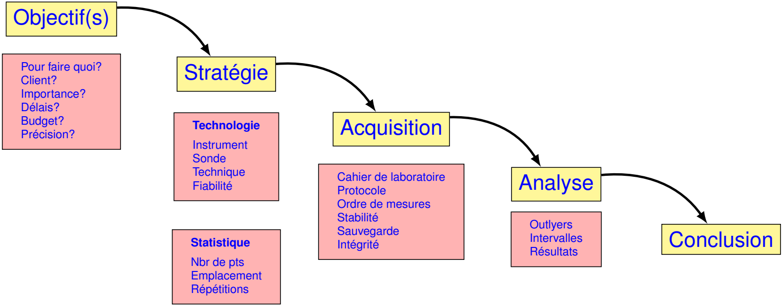
- Un courant d'un ampère correspond au transport d'une charge électrique d'un coulomb par seconde à travers une surface.
- **Définition de 1948**: Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables et distants d'un mètre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs une force linéaire égale à $2 \times 10^{-7}\ Nm^{-1}$.
- **Définition de 2019**: (...) Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, *e*, égale à $1,602\,176\,634 \times 10^{-19} C$, (...).



2.23 Sciences et technologies

- Le développement des sciences a permis le développement des techniques
- La disponibilité de grandes sources d'énergie avec le charbon, le pétrole, l'hydroélectrique a amené l'industrialisation
- Ces éléments sont les piliers de l'ère technologique
- Dans l'environnement technologique, la mesure est un élément essentiel tant pour le contrôle (assurer le fonctionnement) que pour le recherche (développer de nouvelles techniques)

2.24 La mesure comme processus



2.25 Trois caractéristiques du monde

- **Multivariable** : les phénomènes sont influencés par plusieurs facteurs.
- **Bruyant** (noisy) : les instruments de mesure ont un niveau de précision fini et des influences non souhaitées interviennent.
- **Avec des interactions** : lorsque l'effet d'un facteur dépend de l'état d'un autre facteur

$\Rightarrow$ Une approche statistique est nécessaire

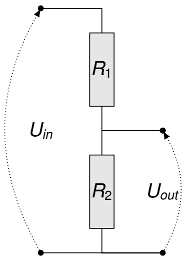
3. Les concepts statistiques

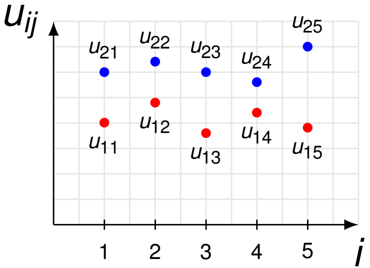
3.1 Variable aléatoire

- La **variable aléatoire** est une concept de base de la statistique que nous allons utiliser pour *modéliser* le résultat d'une mesure
- Il faut distinguer la variable aléatoire à laquelle on a pas accès direct et son échantillonnage qui est le résultat de la mesure
- La mesure de la variable aléatoire X va fournir une série de nombres x_i

3.2 Exemple

- Les tensions U_1 et U_2 par rapport à une référence commune, (une terre) de l'entrée et de la sortie d'un quadripôle sont deux variables aléatoires que l'on peut mesurer N fois et ainsi obtenir N échantillons $\{u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1N}\}$ et $\{u_{211}, u_{22}, \ldots, u_{2N}\}$ de ces deux variables





3.3 Intput-Output

sur MATLAB

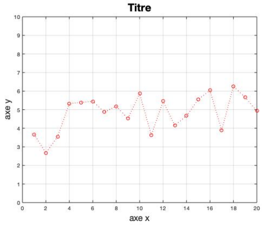
- *X=0:1:20* crée le vecteur $X = [0, 1, 2, \ldots, 20]$
- *X=[. . .]* crée un vecteur avec des valeurs spécifiques
- *T = table(var1, ..., varN, Name, Value)* crée une table
- *T = readtable(FileName.xls','Sheet',SheetName)* charge une table depuis un fichier Excel

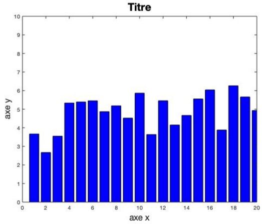
3.0.4 Analyse visuelle

Détecter des motifs, des aberrations, des tendances, etc

Matlab

- *plot(x, y)*
  plot(x, y, LineSpec)
  $plot(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$
  plot(. . . ,Name,Value)
- *bar(x, y)*
  bar(. . . , Width)
  bar(. . . , Style)
  bar(. . . , Name, Value)
- le style *LineSpec* est constitué de trois caractères pour définir la ligne, le symbole et la couleur, par exemple ':or' correspond à une ligne en pointillé,un symbole en forme de petit cercle, le tout en rouge





3.5 Classer les données

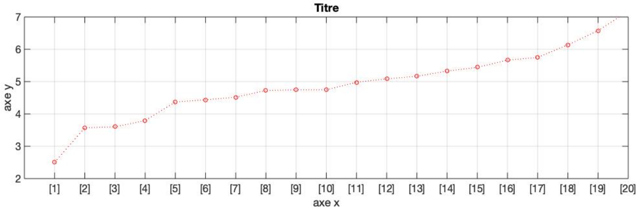
$$x_1 \; x_2 \; \ldots x_N \quad \Rightarrow \quad x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(N)}$$

MATLAB

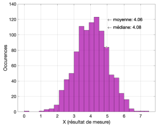
- *[B,Index]=sort(A,dim,direction)*
- *[B,Index]=sortrows(A,col,direction)*
- *[tblB,Index]=sortrows(tblA,col,direction)*

  A, B : matrice
  tblA, tblB : table
  dim : la direction pour effectuer le classement (1,2, . . .)
  col : la colonne de référence pour classer
  direction: 'ascend' or 'descend'

3.0.6 Plot des données classées



3.7 Histogramme des données

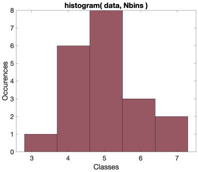


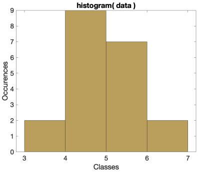
- Représentation graphique permettant de représenter la répartition d'une variable en la représentant par des colonnes verticales les occurrences dans des intervalles ou des catégories qu'on appelle des *classes*.
- Le nombre de valeurs relevées doit être suffisant: plus le nombre est élevé, plus l'interprétation sera aisée.
- Il existe plusieurs manières de déterminer le nombre optimal de classe, K, la plus simple étant $K \approx \sqrt{(N)}$
- L'amplitude, w est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale
- L'amplitude de chaque classe n'est pas obligatoirement la même

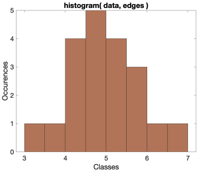
3.8 Exemple d’histogrammes

MATLAB

- *histogram(data,’FaceColor’,’# EDB120’)*
- *histogram(data,5,’FaceColor’,’# A2142F’)*
- *histogram(data,3:.5:7,’Normalization’,’probability’),...*







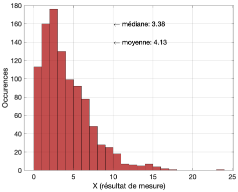
3.9 La moyenne et la médiane

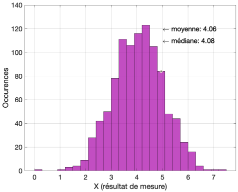
- La **moyenne** une mesure de la position d'une variable aléatoire dans son espace des valeurs

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{3.1}$$

avec N le nombre de mesures et x_i le i-ème résultat

- La **médiane** représente aussi la position de la variable aléatoire mais en séparant son domaine en deux intervalles cumulant chacun 50 % des résultats de mesure: $x_{\left[\frac{N}{2}\right]}$ si N est pair, sinon $\frac{1}{2}\left(x_{\left[\frac{N-1}{2}\right]} + x_{\left[\frac{N+1}{2}\right]}\right)$
- Lorsque la distribution est symétrique, la médiane est égale à la moyenne





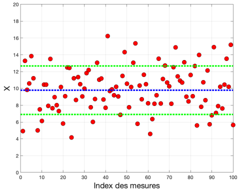
3.10 La variance et l'écart-type

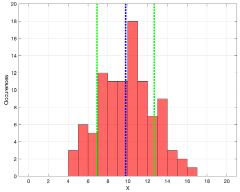
- $var(X)$ est une mesure de la dispersion de la variable X
- s'écrit aussi S_x^2
- L'unité de la variance est le carré de celle de la variable

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (3.2)$$

- L'écart-type S_x est la racine de la variance

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (3.3)$$





3.11 Quelques fonctions sur MATLAB

- Médiane (*median*)
- Moyenne (*average*)
- Plage (*range*)
- Eccart-type (*standard deviation*)
- Variance (*variance*)

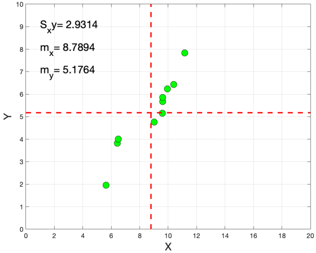
MATLAB

M = median(A)
M = mean(A)
R = range(A)
S = std(A)
v = var(A)

3.12 La covariance

- $cov(X, Y)$ est une mesure de la dépendance entre deux variables X et Y
- Elle s'écrit aussi S_{xy}
- L'unité de la covariance est le produit des unités des deux variables
- Elle se calcule de la manière suivante

$$S_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (3.4)$$



3.13 Le principe de la variance

De la définition 3.3, on comprend que la variance est une somme de carrés, donc pour une combinaison linéaire, avec a et $b \in \mathbb{R}$, on obtient les résultats suivants:

$$var(a\,Z + b) = a^2\; var(Z) \tag{3.5}$$

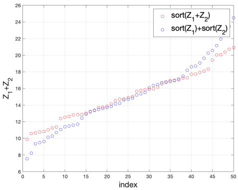
$$var(Z_1 + Z_2) = var(Z_1) + var(Z_2) + 2\;cov(Z_1, Z_2) \tag{3.6}$$

Si Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes, $cov(Z_1, Z_2) = 0$, donc:

$$var(a\,Z_1 + b\,Z_2) = a^2\;var(Z_1) + b^2\;var(Z_2) \tag{3.7}$$

Cas particulier important:

$$var(Z_1 - Z_2) = var(Z_1) + var(Z_2) \tag{3.8}$$

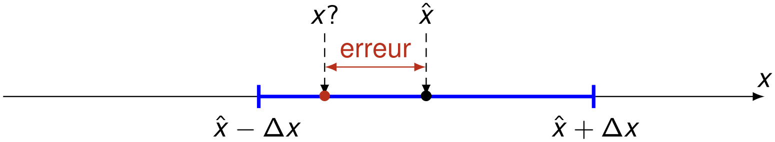


4. Systèmes Physiques

4.1 Erreurs et incertitudes

déjà vu

- Le mot "erreur" n'a pas le même sens dans le langage courant, qu'en science expérimentale où il signifie "incertitude"
- Aucune mesure n'est absolument exacte et donc la valeur vraie est (en général) inconnue
- L'objectif est de tendre à des erreurs aussi petites que possible et d'avoir une estimation de leur amplitude



- Un résultat expérimental $\hat{x}$ est incomplet sans une estimation d'erreur:
  1. un intervalle $\pm\Delta x$
  2. la probabilité de cet intervalle, $p(\hat{x} - \Delta x \geqslant x \geqslant \hat{x} + \Delta x)$

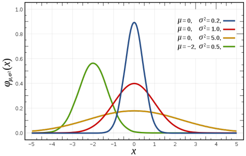
4.2 Types d'erreurs

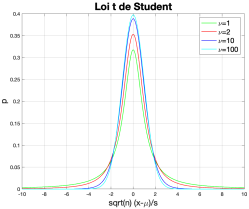
- Erreurs accidentelles
- Erreurs systématique
- **Erreurs aléatoires**

4.3 Erreurs aléatoires

- Elles sont causées par les imprécisions qui interviennent aléatoirement dans la mesure et font qu'une même mesure répétée ne va pas donner le même résultat,
- Elles sont décrites par une distribution de probabilité,
- Pour décrire le résultat d'une mesure on choisit habituellement la distribution normale $X \sim N(\mu, \sigma)$

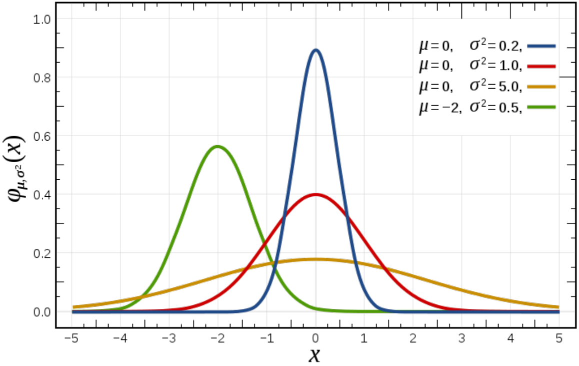
$\Rightarrow$ Lorsque l'on fait des réplications et que l'on utilise la moyenne $\bar{X}$ comme résultat, l'erreur sur cette moyenne suit une loi de Student (slide 3.15)





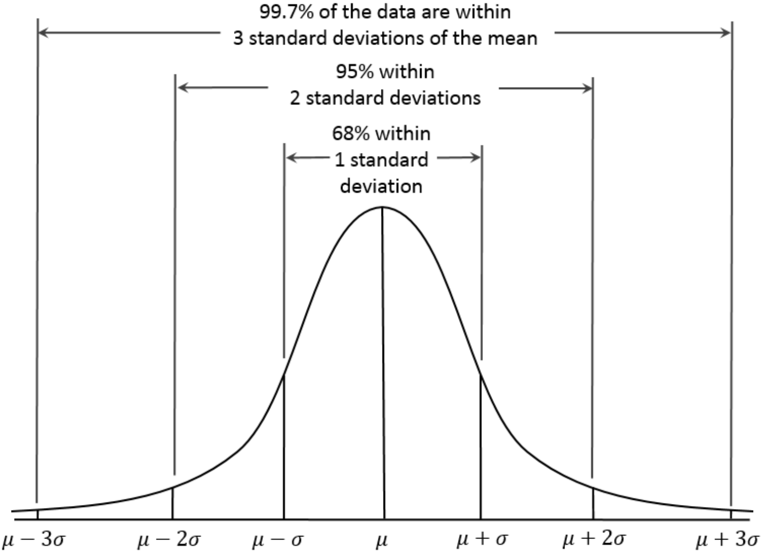
4.4 La distribution Normale N(μ, σ)

loi de Gauss-Laplace



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{4.1}$$

4.4 La distribution Normale N(μ, σ)



4.4 La distribution Normale

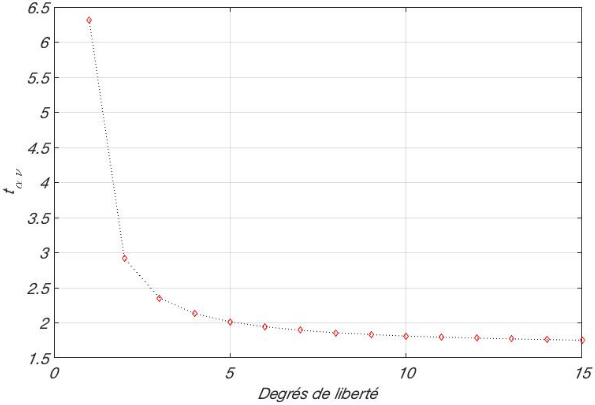
MATLAB

- Génération de nombre aléatoire (utile par exemple pour simuler un processus de mesure)
  X=randn(Ni,Nj)
- La densité de probabilité (probability density function)de la loi Normale aux points *x*
  p=pdf('Normal',x,mu,sigma)
- La fonction de répartition (cumulative density function) de la loi Normale aux points *x*
  p=cdf('Normal',x,mu,sigma)
- L'inverse de la fonction de répartition (inverse cumulative distribution function) pour la probabilité p
  x=icdf('Normal',p,mu,sigma)

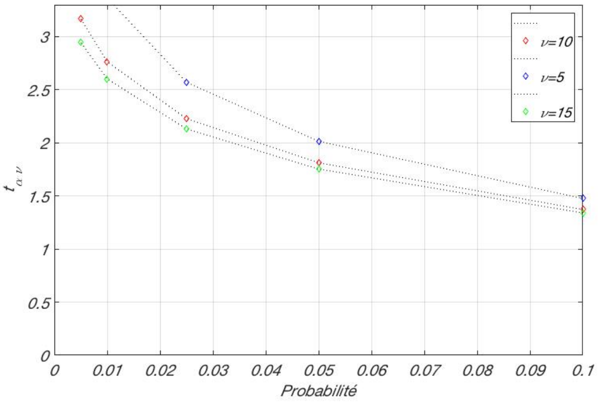
4.5 Distribution $t(\nu)$ de Student

- Distribution très importante pour l'échantillonnage
- Publiée par William Gosset, 1908, (Guinness)
- Par définition, si $\begin{cases} Z \sim N(0,1) \\ U \sim \chi^2(\nu) \end{cases}$ alors
$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu)$$
- Donc si $\bar{x}$ est la moyenne des mesures, μ l'espérance (inconnue) de la population de référence, s l'écart type et ν le nombre de degrés de liberté, alors :
$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{\nu}} \sim t(\nu) \tag{4.2}$$

4.6 Influence du degré de liberté sur $t_{0.05}^{\nu}$

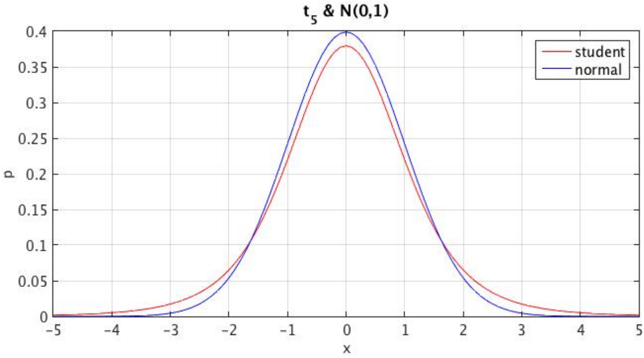


4.7 Influence de la probabilité sur t_{α}^{ν}



4.8 Distribution Normale vs Student

$$T(\nu) \approx N(0,1), \nu \leqslant 30$$



4.8 La distribution t_ν de Student

MATLAB

- Génération de nombre aléatoire selon la loi t_ν pour ν degrés de liberté:
  X=trnd(nu,Ni,Nj)
- Densité de probabilité (probability density function) de la loi *t* aux points *x* pour ν degrés de liberté:
  p=tpdf(x,nu)
- Fonction de répartition (cumulative density function) de la loi t_ν pour ν degrés de liberté aux points *x*:
  p=tcdf(x,nu)   *p=tcdf(x,nu,'upper')*
- Inverse de la fonction de répartition (inverse cumulative distribution function) pour la probabilité *p* et ν degrés de liberté:
  x=tinv(p,nu)

4.9 Intervalle de confiance

Un intervalle de confiance encadre une valeur réelle que l'on cherche à estimer à l'aide de mesures prises par un procédé aléatoire (wikipédia).
A partir de l'équation 4.2, on peut démontrer le théorème de l'intervalle de confiance:

$$P\left(x \in \left[\bar{x} - t_{1-\alpha/2}^{n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\ ,\ \bar{x} + t_{1-\alpha/2}^{n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right]\right) = \alpha \qquad (4.3)$$

Avec

- x une variable aléatoire représentant la quantité qu'on cherche à mesurer
- $\bar{x}$ la moyenne de l'échantillon
- n le nombre de mesures
- S^2 la variance sans biais de l'échantillon
- α la probabilité
- $t_{1-\alpha/2}^{n-1}$ le centile de la distribution de Student pour $n-1$ degrés de liberté et la probabilité résiduelle à droite $1-\alpha/2$

4.10 Combinaison des erreurs - méthode 1

déjà vu

- On considère une valeur calculée y à partir de plusieurs mesures, $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

.

- L'erreur Δ_y peut être estimée à partir des erreurs des mesures Δ_{x_i}

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta_{x_i} \right| \tag{4.4}$$

- Le résultat expérimental pourra alors être représenté par $y = \hat{y} \pm \Delta_y$
- Il est important que chaque erreur estimée corresponde à un niveau de confiance similaire aux autres et qu'il soit reporté.

4.10 Combinaison des erreurs - méthode 1

déjà vu

Erreurs relatives et absolues, calculées avec la méthode 1, pour les quatre opérations arithmétiques

fonction	erreur absolue	erreur relative
$y = x_1 + x_2$	$\Delta y = \lvert\Delta x_1\rvert + \lvert\Delta x_2\rvert$	
$y = x_1 - x_2$	$\Delta y = \lvert\Delta x_1\rvert + \lvert\Delta x_2\rvert$	
$y = x_1 \cdot x_2$	$\Delta y = \lvert x_2\ \Delta x_1\rvert + \lvert x_1\ \Delta x_2\rvert$	$\frac{\Delta y}{y} = \left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_1}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta x_2}{x_2}\right\rvert$
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\Delta y = \left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_2}\right\rvert + \left\lvert\frac{-x_1}{x_2^2}\Delta x_2\right\rvert$	$\frac{\Delta y}{y} = \left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_1}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta x_2}{x_2}\right\rvert$

4.11 Combinaison des erreurs - méthode 2

- Soit une valeur calculée y à partir de plusieurs mesures, $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

.

- L'écart-type s_y peut être calculé à partir des écarts-type s_{x_i}:

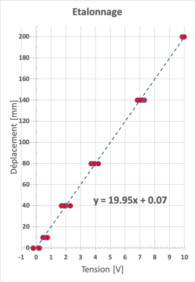
$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 s_{x_i}^2} \qquad (4.5)$$

- L'intervalle de confiance pour la probabilité α pourra alors être calculé avec l'équation 4.3 et le résultat expérimental pourra alors être représenté par

$$y = \hat{y} \pm t_{1-\alpha/2}^{n-1} \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

4.12 Exemple d'un capteur de déplacement

- Un capteur de déplacement a une courbe d'étalonnage linéaire, obtenue à partir de 30 mesures, $\ell = a_o + a_1 U$ avec $a_o = 0 \pm 1 mm$ et $a_1 = 20 \pm 0.2 mm/V$
- On cherche l'erreur autour de la valeur $U = 5.0 V$ sachant que l'écart-type de la mesure de la tension est $s_U = 0.01 \ V$
- Selon l'équation 4.5, on peut écrire



$$\begin{aligned} s_\ell^2 &= \left(\frac{\partial \ell}{\partial a_o} s_{a_o}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ell}{\partial a_1} s_{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ell}{\partial U} s_U\right)^2 \\ &= (1 \times s_{a_o})^2 + (U \times s_{a_1})^2 + (a_1 \times s_U)^2 \\ &\approx (1)^2 + (5 \times 0.2)^2 + (20 \times 0.01)^2 = 2.04 \ mm^2 \\ s_\ell &\approx 1.4 \ mm \end{aligned}$$

- Donc l'intervalle de confiance à 95% est $\pm s_\ell \times t_{0.025,28} \frac{1}{\sqrt{30}} = \pm 1.4 \times 2.05 \times 0.18 \approx \pm 0.52 mm$