EPFL - Printemps 2021	M. Troyanov, G. Buro
Géométrie Riemannienne I	**Exercices**
Série 5	23 Mars 2021

5.1. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le gradient de f par le champ de vecteurs $\mathrm{grad} f \in \Gamma(M)$ tel que $\langle \mathrm{grad} f, X\rangle = df(X) = X(f)$ pour tout $X \in \Gamma(M)$. Calculer l'expression du gradient en coordonnées.

(a) Soit $Y \in \Gamma(M)$ un champ de vecteurs, alors la divergence de Y est donnée par la fonction lisse $\mathrm{div}(Y) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ définie par $\mathrm{div}(Y) = \mathrm{Trace}(\nabla Y)$ où $\nabla Y : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ est donnée par $\nabla Y(X) = \nabla_X Y$.

(b) Calculer l'expression de la divergence en coordonnées.

(c) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le laplacien de f par la fonction $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$. Calculer l'expression du laplacien en coordonnées.

(d) Remarquer que si $M = \mathbb{R}^n$, les concepts de gradient, divergence et laplacien correspondent à ce que vous avez appris en deuxième année.

5.2. Expliciter l'application de transport parallèle le long d'un horocycle du 1/2-plan hyperbolique (une courbe de la forme $\gamma(t) = (t, c)$ où c est une constante).

5.3. (a) Expliquer ce qu'on entend lorsqu'on dit qu'une connexion n'est pas un tenseur, puis justifier cette affirmation.

(b) Prouver la formule de changement de coordonnées pour les symboles de Levi-Civita: Supposons que $(x^1, \ldots, x^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $p \in M$ et $(y^1, \ldots, y^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $q = f(p) \in M$ avec f un changement de coordonnées.

Montrer que le changement de coordonnées pour les symboles de Christoffels est donné par la formule

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x) \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(f(x)) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}.$$

5.4. Soit (M, g) une variété riemannienne et $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe lisse quelconque.

(a) Montrer que si ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g alors, pour tout couple de champs parallèles $X, Y \in \Gamma_\gamma$, $g(X, Y)$ est constant le long de γ.

(b) En déduire que P_t est une isométrie de $T_{\gamma(0)}M$ sur $T_{\gamma(t)}M$ puis qu'il existe des champs de vecteurs qui forment une base orthonormée en tout point et qui sont parallèle le long de γ.

(c) Soit X un champs parallèle le long de γ. Montrer que ses coordonnées dans un repère du type précédent sont constantes.

(d) On suppose maintenant que M est de dimension 2. Montrer que γ est une géodésique si et seulement si $\|\dot\gamma\|$ est constante et si $\|X\|$ et $\angle(X, \dot\gamma)$ sont constants le long de γ pour tout champ parallèle X.

5.5. Soit ∇ une connexion (quelconque) et P_t l'application de transport parallèle associée. Montrer que

$$\nabla_t V_0 = \lim_{t\to 0} \frac{P_t^{-1} V(t) - V(0)}{t - t_0}.$$

Interpréter cette formule.

5.6. Montrer que le transport parallèle dans $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne ne dépend pas de la courbe choisie.

5.7. Soit (M, g) une variété riemannienne connexe et soit H_p l'ensemble des endomorphisme de T_pM donnés par des transports parallèles le long de courbes $c : [0, 1] \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telles que $c(0) = c(1)$. Montrer que H_p est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ et que H_p et H_q sont isomorphes.

5.8. On considère un cercle parallèle à l'équateur de la sphère $\mathbb{S}^2$. Calculer l'holonomie le long de cette courbe. Il peut être utile introduire le cône de $\mathbb{R}^3$ dont l'intersection avec $\mathbb{S}^2$ est exactement la courbe considérée.