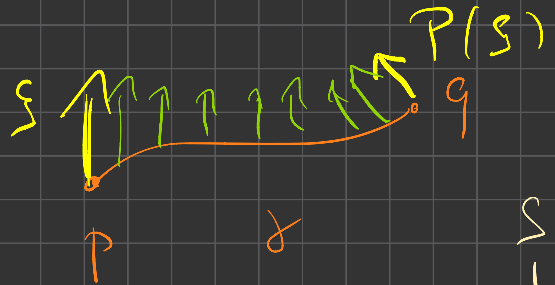
§ 3.4. Transport Parallèle

<u>But</u> Soit M une variété diff. et une connexion ∇, on suppose M est connexe et $p, q \in M$ et soit un chemin C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \to M$ qui relie p à q. On aimerait associer à ce chemin (et ∇) un isomorphisme linéaire

$$P^{\gamma} : T_pM \to T_qM$$

l'idée sera de "transporter" les vecteurs de T_pM vers T_qM, le long de γ, "parallèlement à eux même". La condition d'être "parallèle à soi-même" va être définie à partir de la connexion.

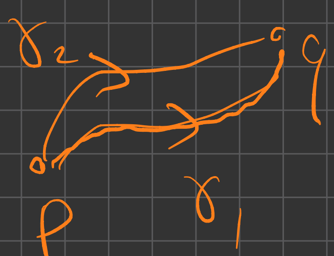


De plus, si (M,g) une variété semi-riemannienne et ∇ est la connexion de Levi-Civita alors on voit que

$$P^{\gamma} : (T_pM, g_p) \longrightarrow (T_qM, g_q)$$

est une isométrie.

<u>Remarque</u>: En général le transport parallèle P^{γ} dépend du chemin, Si γ_1, γ_2 relient p à q



Alors $(P^{\gamma_2})^{-1} \circ P^{\gamma_1} : T_pM \longrightarrow T_pM$

est le transport parallèle le long de

$$\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$$

On appelle cet endomorphisme $P^\gamma \in \mathrm{End}(T_p M)$ ($\gamma = \gamma_1 * \gamma_2^{-1}$) l'<u>holonomie</u> de γ (par la connexion ∇)

Toutes ces holonomies engendrent un sous-groupe de $GL(T_p M) = \mathrm{Aut}(T_p M)$. Le groupe d'holonomie de (M, ∇) en p.

<u>Définition</u> Si $\gamma : [a,b] \to M$ un chemin C^∞. On appelle <u>champ de vecteurs</u> le long de γ est une fonction C^∞

$$X : [a,b] \longrightarrow TM$$

telle que $\pi \circ X = \gamma$ où $\pi : TM \to M$ est la projection canonique (donc $X_t \in T_{\gamma(t)}M$, $\forall t \in [a,b]$)

On note Γ_γ l'ensemble des champs de vecteurs le long de γ. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Mieux c'est un module sur l'algèbre $C^\infty([a,b])$.

<u>Proposition</u> L'opération de dérivée covariante est bien définie sur Γ_γ. C'est-à-dire : si $Y \in \Gamma_\gamma$ alors sa dérivée covariante

$$\nabla_{\dot\gamma} Y = \nabla_t Y \quad \text{est bien définie.}$$

(Rappelons qu'à priori $\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$, il faudrait connaître le champ Y sur M globalement)

<u>Preuve</u> Quitte à restreindre la courbe, on peut supposer que $\gamma([a,b])$ est contenue dans le domaine $U \subset M$ d'un système de coordonnées $x^1, \dots, x^n$.

On note

$$\left.\begin{aligned} &\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \text{et} \quad &Y_t = \sum_{j=1}^{n} b^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}\right\}$$

On calcule

$$\nabla_t Y = \nabla_{\dot\gamma} Y = \nabla_{(\dot x^i \partial_i)} (b^j \partial_j)$$

$$= \sum_i \dot x^i \partial_i (b^j) \partial_j + b^j \sum_i \dot x^i \nabla_{\partial_i} \partial_j$$

$\Rightarrow$

$$\nabla_t Y = \sum_i \dot{b}^j \partial_j + \sum_{i,j,k} \dot{x}^i b^j \Gamma^k_{ij} \partial_k$$

$$\boxed{\nabla_t Y = \sum_k \left(\dot{b}^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i b^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}}$$

#

Remarques (1) On a $\dot{\gamma}(t) = " (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) "$

(on utilise ce "truc" dans le calcul precedent")

$$= \sum_i \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Donc $\sum \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} (b^j)$ signifie $\frac{d}{dt} b^j(\gamma(t)) = \dot{b}^j(t)$

(2) On peut reecrire

$$\nabla_t Y = \frac{d}{dt}(Y_t) + \sum_{i,j,k} \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\, \dot{x}^i b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Propriétés L'opération de dérivation covariante

$$\nabla_t : \Gamma_\gamma \longrightarrow \Gamma_\gamma$$

vérifie

① $\nabla_t (Y_1 + Y_2) = \nabla_t Y_1 + \nabla_t Y_2$

② $\nabla_t (h \cdot Y) = h \cdot \nabla_t Y + \frac{dh}{dt} \cdot Y \qquad \left(\forall\, h \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}) \right)$

③ Si ∇ est la connexion de Levi-Civita par une métrique g, alors on a

$$\frac{d}{dt}\left(g_{\gamma(t)} (Y_1, Y_2) \right) = g_{\gamma(t)} (\nabla_t Y_1, Y_2) + g_{\gamma(t)} (Y_1, \nabla_t Y_2)$$

on peut écrire $\frac{d}{dt} \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle \nabla_t Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_t Y_2 \rangle$

Preuve : Exercice

Définition : Un champ de vecteur $X \in \Gamma_\gamma$ est dit **parallèle** (par la connexion) si

$$\nabla_t X \equiv 0$$

Exemple : le champ de vitesse de γ est $\dot\gamma \in \Gamma_\gamma$ est parallèle ssi $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma \equiv 0$, c'est-à-dire que γ est géodésique par γ.

Théorème Soit M une variété connexe, C^∞, avec une connexion ∇ et soit $\gamma : [0,1] \to M$ un chemin C^∞. Alors $\forall\, \xi \in T_pM$ $(p = \gamma(0))$ il existe un unique $X \in \Gamma_\gamma$ tel que

$\nabla_t X \equiv 0$ et $X_0 = \xi \in T_p\Pi$.

<u>Notation</u> On note $P_t(\xi)$ (ou $P_t^\gamma(\xi)$) le vecteur $X_t \in T_{\gamma(t)}(\Pi)$ de ce théorème.

On l'appelle le <u>transport parallèle</u> de ξ le long de γ

$$X_t = P_t(\xi) \in T_{\gamma(t)}\Pi$$

<u>Remarque</u> Par construction, le transport parallèle associe à un vecteur $\xi \in T_{\gamma(0)}\Pi$ un champ de vecteurs le long de γ

donc on a $\quad P^\gamma : T_p M \longrightarrow T_\gamma$.

lorsqu'on s'intéresse à l'extrémité $q = \gamma(1)$ du chemin, on appelle aussi "transport parallèle" l'application:

$$P^\gamma_1 \quad T_p M \longrightarrow T_q M$$

Preuve du Théorème : On suppose d'abord que $\gamma([0,1]) \subset U$ = domaine dans M d'un système de coordonnées on note

$$\gamma(t) = \left(x^1(t), \dots, x^n(t)\right)$$

et $\quad \xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p U = T_p M, \quad (p = \gamma(0))$

On définit des fonctions C^∞

$$a^1, \dots, a^n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

par les conditions :

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{da^k}{dt} = - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\, \dot{x}^i(t)\, a^j(t) \\ a^k(0) = \xi^k \end{cases}$$

Le théorème d'existence et d'unicité des solutions de systèmes d'EDO linéaires nous garantit l'existence et l'unicité des $a^i(t)$ $(\forall t \in [0,1])$

Notons $$X_t = \sum_{i=1}^{n} a^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \in TU$$

qu'on regarde comme vecteur tangent en $\gamma(t)$ ($X_t \in T_{\gamma(t)} \Pi$). Par construction ce champ de vecteur appartient à T_γ et vérifie

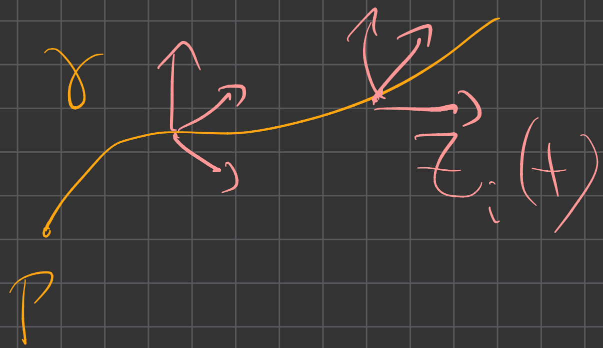
$$X_0 = \xi \in T_p \Pi \quad \text{et} \quad \nabla_t \xi = 0$$

Si γ est une courbe générale (pas contenue dans un domaine de coordonnées) alors on écrit γ comme concaténation d'arcs de courbes $\gamma_1 * \cdots * \gamma_s$ avec chaque γ_j contenu dans un domaine de coordonnées #

<u>Autre Argument</u> : On construit le transport parallèle $P = P^\gamma : T_p M \longrightarrow T_\gamma$ $(p = \gamma(0))$ de la façon suivante : Soit

$$Z_1, \ldots, Z_n \in T_\gamma$$

n champs de vecteurs qui sont linéairement indépendants $\forall t \in [0,1]$ et C^∞. On dit que $\{Z_1(t), \ldots, Z_n(t)\} \subset T_{\gamma(t)} M$ est un <u>repère mobile</u> le long de γ



On définit n^2 fonctions $d_i^j : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\nabla_t Z_i = \sum_j d_i^j(t) Z_j(t)$$

et on note

$$D(t) = \left(d_i^j(t) \right)$$

Notons également

$$P_t(Z_i(0)) = \sum_{k=1}^{n} P_i^k(t) Z_k(t)$$

et on note

$$\underline{P}(t) = \left(P_i^k(t) \right)$$

la condition $\nabla_t \left(P_t (z_i(0)) \right) = 0$ s'écrit

$$\nabla_t \left(P_t (z_i(0)) \right) = \sum_{k=1}^{n} \nabla_t \left(P_i^k(t) \cdot z_k(t) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \dot{P}_i^k(t) z_k + \sum_{k=1}^{n} P_i^k(t) \nabla_t \left(z_k(t) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \dot{P}_i^k(t) z_k + \sum_{k,j} P_i^k d_k^j z_j$$

$$= \sum_j \left(\dot{P}_i^j + \sum_k d_k^j P_i^k \right) z_j = 0$$

Donc les fonctions $P^j_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont définie par les conditions

$$\begin{cases} \dot{P}^j_i(t) = - \sum_k d^j_k(t) P^k_i(t) \\ P^j_i(0) = \delta^k_i \end{cases}$$

Matriciellement

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{P}}{dt} = - D(t) P(t) \\ \underline{P}(0) = \underline{I} \end{cases}$$

De nouveau le théorème sur les EDO linéaire nous garantit l'existence et l'unicité de $P(t)$ $\forall\, t \in [0,T]$

#

<u>Remarque</u> la notion de repère mobile

$Z_1, \dots, Z_n \in \Gamma_\gamma$ le long de la courbe γ

permet d'écrire tout champ $X \in \Gamma_\gamma$ de façon unique sous la forme

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} a^i(t)\, Z_i(t) \in T_{\gamma(t)} M$$

avec $a^1, \ldots, a^n \in C^\infty([0,1])$.

$\left(T_\gamma \text{ est un modèle sur } C^\infty([0,1]) \right)$