6.1. Soit f une surface réglée d'une variété riemannienne M, c'est-à-dire une immersion

$$\begin{array}{rccc} f: & [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] & \longrightarrow & M \\ & (s,t) & \longmapsto & f(s,t) \end{array}$$

telle que, pour tout s, la courbe $t \mapsto \gamma_s(t) = f(s,t)$ est une géodésique. On suppose aussi que la norme du champ $\frac{\partial}{\partial s}$ est constante. On note

$$\alpha(s) = f(s, t_0) \quad \text{et} \quad \beta(s) = f(s, t_1).$$

(a) Montrer que
$$\frac{d}{ds} l(\gamma_s) = \cos\varphi(s) - \cos\theta(s)$$
où $\varphi(s)$ est l'angle entre $\dot\gamma(t_1)$ et $\beta(s)$ et $\theta(s)$ est l'angle entre $\dot\gamma(t_0)$ et $\alpha(s)$.

(b) Faire un dessin qui explique la résolution de cet exercice.

6.2. Soit $\gamma : [a,b] \to M$ une courbe lisse paramétrée par a longueur de l'arc.

(a) Montrer que $\nabla_t \dot\gamma(t)$ est orthogonale à $\dot\gamma(t)$ pour tout t.

(b) Si $\Phi : [a,b] \times] - \varepsilon, \varepsilon[\to M$ est une variation propre de γ telle que pour tout s, Φ_s est une reparamétrisation de γ, montrer de deux manières que la variation première de $L(\Phi_s)$ s'annule.

6.3. Soit N une sous-variété plongée et fermée dans une variété Riemannienne M.
Pour tout point $p \in M \backslash N$, on défini la distance de p à N par

$$d(p, N) := \inf\{d(p,x) | x \in N\}.$$

Si $q \in N$ est un point tel que $d(p,q) = d(p,N)$, et γ est une géodésique minimisante entre p et q, montrer que γ intersecte N de manière orthogonale.

6.4. Calculer la métrique du plan hyperbolique en coordonnées polaires Riemanniennes.
(Indication: Se placer dans le modèle du disque de Poincaré.)