2.1. (a) On note $\frac{\partial w}{\partial t}$ la dérivée partielle de w par rapport à t. On rappelle que, par définition, cette dérivée partielle est obtenue en fixant la variable s et en dérivant w par rapport à t uniquement :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(s,t) = \lim_{h\to 0} \frac{w((s,t)+h(0,1))}{h}.$$

C'est un cas particulier de ce qu'on appelle une *dérivée directionnelle.*
On note maintenant $\frac{dw}{dt}$ la dérivée totale par rapport à t. La définition est donnée par la formule

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{ds}{dt}.$$

(b) En comparant les deux expressions précédentes, on constate que

$$\frac{\partial w}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

dans l'un des deux cas suivants : (i) si w ne dépend pas de s ou (ii) si s ne dépend pas de t.

(c) Dans la preuve des équations d'Euler-Lagrange (relire), il y a une étape où apparaît une intégrale contenant le terme $\frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial s}$. Il est légitime de remplacer ce terme par $\frac{d}{dt}\frac{dx^i}{\partial s}$ car s ne dépend pas de t, et cela justifie l'intégration par parties utilisée dans l'argument.

2.2. (a) On considère une application "changement de paramétrisation",

$$f : [c,d] \to [a,b]\,.$$

On peut supposer que f est croissante (sinon l'exercice se traite de la même façon). On a alors $\dot{\overline{\gamma \circ f}} = f'(t)\dot\gamma(f(t))$ donc $\left\|\dot{\overline{\gamma \circ f}}\right\| = f'(t)\,\|\dot\gamma(f(t))\|$ (f est croissante) puis

$$\begin{aligned} l(\gamma\circ f) &= \int_c^d \left\|\dot{\overline{\gamma \circ f}}\right\| dt \\ &= \int_c^d f'(t)\,\|\dot\gamma(f(t))\|\,dt \\ &= l(\gamma) \end{aligned}$$

après avoir fait le changement de variables associé à f.

(b) L'énergie n'est pas invariante par reparamétrisation. En effet les deux courbes (dans $\mathbb{R}$) définie par

$$\gamma_1 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t \end{array}$$

et

$$\gamma_2 : \begin{array}{ccc} [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t}{2} \end{array}$$

ont même image mais $E(\gamma_1) = \frac{1}{2}$ alors que $E(\gamma_2) = \frac{1}{4}$.

(c) On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} l(\gamma)^2 &= \left(\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt\right)^2 \\ &\leqslant \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|^2\,dt \int_a^b dt \\ &= 2(b-a)E(\gamma). \end{aligned}$$

L'égalité a lieu s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz, c'est-à-dire si les fonctions $t \mapsto \|\dot\gamma(t)\|$ et $t \mapsto 1$ sont proportionnelles, autrement dit, si γ est parcourue à vitesse constante.

2.3. (a)

- Si V est un espace vectoriel et si $<\cdot,\cdot>$ est un produit scalaire sur V (ou même seulement une forme bilinéaire non dégénérée), on dispose d'un isomorphisme de V sur son dual V^* grâce à l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & V & \longrightarrow & V^* \\ & x & \longmapsto & y \mapsto <y,x> \end{array}.$$

- Le cas riemannien est une généralisation variationnelle de cette idée. Une métrique riemannienne fournit un isomorphisme de $\Gamma(M)$ (i.e "un vecteur variable") vers $\Omega^1(M)$ (i.e "un covecteur variable") grâce à

$$\begin{array}{rccc} f: & \Gamma(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ & X & \longmapsto & Y \mapsto <Y,X> \end{array}.$$

  Le résultat en découle.

(b) On fixe des coordonnées locales $x^1, \cdots, x^n$. On écrit la métrique g dans ces coordonnées :

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j,$$

la forme θ :

$$\theta = \sum_i a_i dx^i,$$

le champ X :

$$X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

et le champ $\theta^\#$:

$$\theta^\# = \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Toutes ces quantités sont liées par l'équation de la question (a), i.e, pour tout champs X,

$$\sum_{ij} g_{ij} X^i b^j = \sum_i a_i X^i.$$

Puisque cette égalité a lieu pour tout X, on en déduit que, pour tout i,

$$\sum_j g_{ij} b^j = a_i.$$

C'est un système d'équations linéaires d'inconnues b_j. On sait que la matrice (g_{ij}) est inversible puisque la métrique est non dégénérée. On note alors $\tilde{g}_{ij}$ les coefficients de la matrices $(g_{ij})^{-1}$. Le système se résout en

$$b^i = \sum_j \tilde{g}_{ij} a_j$$

pour tout i, ou encore,

$$\theta^\# = \sum_i \left(\sum_j \tilde{g}_{ij} a_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Il suffit d'appliquer ce qui précède à $\theta = df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$. On obtient

$$df^\# = \sum_i \left(\sum_j \tilde{g}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(c)
- Les coordonnées cartésiennes sont données par $g_{ij} = \delta_{ij}$ et donc aussi $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$. On trouve, en appliquant la formule précédente,
$$df^\# = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$
- Les coordonnées polaires de la métrique ont été calculées la semaine passée. On a $g_{rr} = 1$, $g_{r\theta} = 0$ et $g_{\theta\theta} = r^2$. Après avoir inversé g et avec la formule précédente, on trouve,
$$df^\# = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

2.4. Voir John M. Lee, "Riemannian Manifolds", prop. 3.5

2.5. (a) La métrique sphérique dans las coordonées (ϕ, θ) est

$$g = f^* \mathrm{Eucl} = d\theta^2 + (\sin\theta)^2 \, d\phi^2,$$

où $\mathrm{Eucl} = dx^2 + dy^2 + dz^2$ est la métrique euclidienne dans R^3.

(b) La projection "boîte de conserve" du point $f(\phi, \theta)$ est le point $a(\phi, \theta) = (\cos\phi, \sin\phi, \cos\theta)$. La métrique après la projection, dans les mêmes coordonnées (ϕ, θ), est

$$a^* \mathrm{Eucl} = d\phi^2 + (\sin\theta)^2 d\theta^2,$$

qui n'est pas une déformation conforme de g

(c) On dénote $m(\phi, \theta) = (\phi, f(\theta))$. On cherche une fonction réelle $f(\theta)$ tel que la métrique

$$h = m^* \mathrm{Eucl} = d\phi^2 + f'(\theta)^2 d\theta^2$$

soit une déformation conforme de la métrique sphérique

$$g = d\theta^2 + (\sin\theta)^2 \, d\phi^2,$$

ça veut dire, on veut qu'il existe une fonction $u = u(\phi, \theta)$ (le facteur conforme) tel que $h = u^2 g$. En régardant les termes avec $d\phi^2$, on voit que le facteur conforme doit être $u(\phi, \theta) = \frac{1}{\sin\theta}$. Cela implique que la fonction $f(\theta)$ doit satisfaire l'equation $|f'(\theta)| = \frac{1}{\sin\theta}$. On peut utiliser

$$f(\theta) = -\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

(d) Chaque chemin loxodromique fait un angle constant avec les méridiens. Si on continue un chemin loxodromique où l'angle n'est pas nul, le chemin s'approche au pôle de la sphère en faisant une spirale. C'est évident donc qu'il ne peu pas être le chemin le plus court.