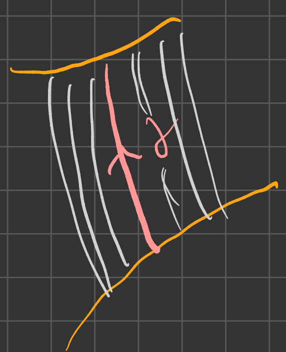
30 Mars, semaine 6

§ 3.5. Formule de variation première

But : On se donne une courbe $\gamma : [a,b] \to M$, de classe C^2 dans une variété riemannienne (M,g). On veut calculer la dérivée de la longueur de toute variation (C^2) $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$ de γ.



On note $\varphi_s(t) = \gamma_s(t) = \varphi(s,t)$ que l'on voit comme une famille de courbes qui déforme γ.

Question : $\dfrac{d}{ds} \ell(\gamma_s) = \; ?$

On note

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_*\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\text{Vitesse le long de } \gamma_s\right) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} = \varphi_*\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right) = \text{"Champ de déformation"} \end{cases}$$

<u>Lemme 1</u> Si ∇ est la connexion de Levi-Civita de g, alors

$$\nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

<u>Preuve</u> : On vérifie cette relation dans un système de coordonnées locales $(x^1, \dots, x^n)$. On a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Alon

$$\nabla_t\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = \nabla_t\left(\frac{\partial\varphi^k}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

$$= \frac{\partial\varphi^k}{\partial t\partial s}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial\varphi^k}{\partial s}\cdot\nabla_t\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Or

$$\nabla_t\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\frac{\partial\varphi^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$= \frac{\partial\varphi^i}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial\varphi^i}{\partial t}\cdot\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla_t\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \left(\frac{\partial\varphi^k}{\partial t\partial s} + \frac{\partial\varphi^j}{\partial s}\frac{\partial\varphi^i}{\partial t}\cdot\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Puisque $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ (par la connexion de Levi-Civita)

donc $\nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est donné par la même expression

#

<u>Remarque</u> Ce lemme a une autre explication :

la connexion de Levi-Civita est <u>sans torsion</u> :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \qquad (\forall\ X, Y \in \Gamma(M))$$

on applique cette identité aux champs $\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}$:

$$\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]$$

$$= \left[\varphi_* \frac{\partial}{\partial s}, \varphi_* \frac{\partial}{\partial t}\right]$$

$$= \varphi_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right]\right)$$

$$= \varphi_*(0) = 0$$

#

<u>Lemme 2</u> Sous les hypothèses précédentes on a

$$\frac{d}{ds} \ell(\gamma_s) = \int_a^b \frac{g\left(\nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}{\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|} dt$$

<u>Preuve</u> Le champ $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est C^1 ainsi que le tenseur métrique g, on peut dériver sous le signe d'intégration :

$$\frac{d}{ds} \ell(\varphi_s) = \frac{d}{ds} \int_a^b \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\| dt = \frac{d}{ds} \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\rangle} dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle}\, dt = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial s} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle}{\sqrt{\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle}}\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\langle \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle}{\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \|}\, dt \quad \left(\text{car } \nabla \text{ est compatible avec } g : \; X(g(Y,Y)) = 2g(\nabla_X Y, Y) \right)$$

$$= \int_a^b \frac{\langle \nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle}{\| \dot{\gamma}_s \|}\, dt \quad \left(\text{par le lemme } 1 \text{ et } \dot{\gamma}_s(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

#

On va supposer que γ est parcourue à vitesse constante (on peut reparamétriser γ si nécessaire, ça ne change pas la longueur de γ)

On a alors $\ell = \ell(\gamma) = \|\dot\gamma\| \cdot (b-a) \Rightarrow \frac{1}{\|\dot\gamma\|} = \frac{(b-a)}{\ell}$

Le lemme précédent s'écrit :

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \ell(\gamma_s) = \frac{(b-a)}{\ell} \int_a^b \left\langle \nabla_t \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle dt$$

Truc (intégration par parties)

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \nabla_t \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \nabla_t \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle$$

De plus, en $s=0$ on a $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \dot\gamma(t)$. Donc

On a

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \ell(\gamma_s) = \frac{(b-a)}{\ell} \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \nabla_t \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle \right) dt$$

Théorème

$$\boxed{\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=c} \ell(\gamma_c) = \frac{(b-a)}{\ell}\left[\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,t), \dot\gamma(t)\right\rangle \Big|_{t=a}^{b} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \nabla_t \dot\gamma \right\rangle dt \right]}$$

(où $\ell = \ell(\gamma)$)

C'est la formule de variation première par les longueurs.

(et à $\|\dot\gamma\| = \text{const}$.)

Corollaire 1 Une courbe $\gamma : [a,b] \to M$ de classe C^2 est critique par la fonctionelle longueur, par les variations à extrémités fixées si et seulement si γ est géodésique.

Preuve Si $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$ est une variation à extrémités fixées, alors $\varphi(s,a) = \gamma(a) = p$, $\varphi(s,b) = \gamma(b) = q$, $\forall s$

alors on a $$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0,a) = 0 \in T_p M, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0,b) = 0 \in T_q M$$

Donc la formule de variation première se réduit à

$$\frac{d}{ds} \ell(\gamma_s) = -\frac{(b-a)}{\ell} \int_a^b \langle Y, \nabla_t \dot\gamma \rangle dt, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

Cette quantité s'annule pour toute variation de γ à extrémités fixées

$\iff \nabla_t \dot\gamma = 0$

$\iff \gamma$ est géodésique. #

<u>Cas particulier</u>: Si γ est une courbe de classe C^2 qui relie p à q ($p, q \in M$) et minimise la longueur, i.e.

$$\ell(\gamma) = d(p,q) = \inf\left\{ \ell(\alpha) \;\middle|\; \alpha = \text{courbe de } p \text{ à } q \right\}$$

Alors γ est géodésique (après reparamétrisation éventuelle).

<u>Remarques</u> ① Ce résultat reste vrai pour les courbes C^1 par morceaux. On a le résultat suivant :

> Si $\gamma : [a,b] \to M$ est une courbe C^1 par morceaux reliant p à q et de longueur minimale et paramétrée à vitesse constante. Alors γ est C^2 et $\nabla_t \dot\gamma = 0$.

② Toute géodésique est parcourue à vitesse constante

(preuve : $$\frac{d}{dt}\|\dot\gamma\|^2 = \frac{d}{dt}\left(g(\dot\gamma,\dot\gamma)\right) = 2\, g(\underbrace{\nabla_t \dot\gamma}_{=0}, \dot\gamma) = 0 \;)$$

Corollaire 2 Si $N \subset M$ est une sous-variété de M, $p \notin N$ et γ une courbe (C^2) qui relie p à N et qui vérifie

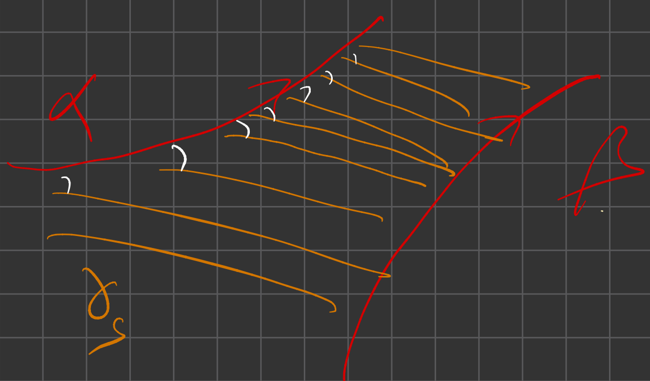
$$\ell(\gamma) = \inf \{ \ell(\alpha) \mid \alpha : [a,b] \to M,\ \alpha(a) = p,\ \alpha(b) \in N \}$$

Alors on a $\dot\gamma(b)$ est orthogonal à $T_{\gamma(b)}N$

(une courbe minimisante tombe orthogonalement sur N)

Preuve Exercice.

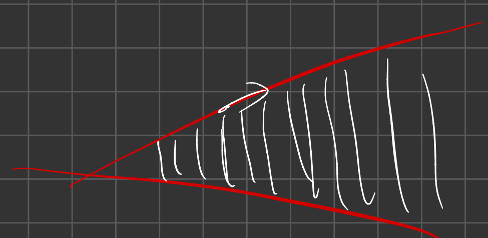
Variante (exemple) Si on a deux courbes $\alpha(s)$, $\beta(s)$ dans M et $\forall s$ on a une géodésique $\gamma_s(t) = \varphi(s,t)$ reliant $\alpha(s)$ à $\beta(s)$. Alors la dérivée de $\ell(\gamma_s)$ ne dépend que des angles entre γ et α, β



$\Rightarrow$

$$-\frac{d}{ds}\ell(\gamma_s) = \frac{(b-a)}{\ell(\gamma_s)}\left[\langle \dot\alpha(s), \dot\gamma_s(a)\rangle - \langle \dot\beta(s), \dot\gamma_s(b)\rangle\right]$$

$\mathbb{R}^2$



$\rightsquigarrow$ Théorème de Thalès

§ 3.6 L'application exponentielle

Théorème : Soit (M, g) une variété (semi)-riemannienne. Alors il existe un ouvert $D \subset \mathbb{R} \times TM$, contient le sous-ensemble $\{0\} \times TM$ tel que pour tout élément $(p, v) \in TM$ (i.e. $v \in T_p M$), il existe une unique géodésique

$$\gamma = \gamma_{p,v} : I_{p,v} \longrightarrow M$$

où $I_{p,v} = \{ t \in \mathbb{R} \mid (t, p, v) \in D \}$ = intervalle dans $\mathbb{R}$

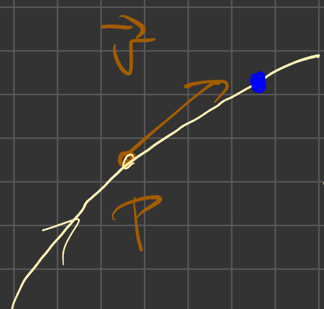
t.q. $\gamma_{p,v}(0) = p$, $\dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$.

De plus, l'application $(p, v) \longmapsto \gamma_{p,v}(t)$ est C^∞ $\forall t$.

Preuve On se ramène en coordonnées locales et on utilise le théorème d'existence, unicité et dépendance par rapport aux conditions initiales des solutions d'EDO appliqué à

$$\nabla_t \dot\gamma = 0 \iff \ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(x)\, \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

#



$\gamma_v(t)$, $(t \in I_{p,v})$

$\gamma_v(0) = p$, $\dot\gamma_v(0) = v$, γ géodésique, $\nabla_t \dot\gamma = 0$

Définition (provisoire) On note $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$

(lorsque c'est bien défini, i.e. $1 \in I_{p,v}$)