Exercice pour le cours système de mesure

Jean-Marie Fürbringer

12 avril 2021

Le diviseur de tension - Énoncé

Un diviseur de tension est un montage électronique simple qui permet de diviser une tension d'entrée,. Il est constitué de deux résistances en série. Il est utilisé comme son nom l'indique pour créer une tension donnée inférieur à une source de tension fixe.

Pour une description détaillée voir par exemple l'article correspondant sur Wikipédia.

Le circuit équivalent est présenté à la figure 1.

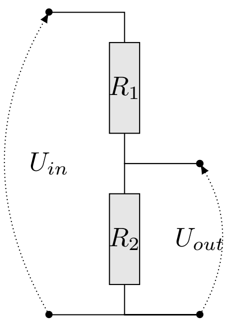

FIGURE 1 – Diviseur de tension

-	R_1	R_2	Z_1	Z_2	U_{in}
1	10 Ω	20 Ω	1 Ω	100 Ω	100 V
2	10 Ω	10 Ω	1 Ω	100 Ω	100 V
3	100 Ω	100 Ω	1 Ω	100 Ω	100 V
4	100 Ω	100 Ω	1 Ω	100 Ω	100 V
5	100 Ω	100 Ω	1 Ω	1 kΩ	100 V
6	100 Ω	100 Ω	1 Ω	1 kΩ	10 V
7	100 Ω	10 Ω	1 Ω	1 kΩ	10 V

TABLE 1 – Cas pour l'application numérique

Si on applique en entrée un tension U_{in} et que l'on connecte le quadripôle en sortie avec une impédance Z_{ex}, grâce à la loi de maille et à la loi d'Ohm, il est possible d'exprimer le tension de sortie U_{out} en fonction de la tension d'entrée, de l'impédance externe et des caractéristiques du circuit, les résistances R_1 et R_2 :

$$U_{out} = U_{in} \frac{R_2 \ Z_{ex}}{(R_1 + R_2) \ Z_{ex} + R_1 R_2} \tag{1}$$

Si l'impédance externe Z_{ex} est très supérieure à l'impédance interne constituée par R_1 et R_2, on pourra simplifier l'équation 1 qui devient alors

$$U_{out} = U_{in} \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \tag{2}$$

a) Déterminer les valeurs de R_1 et R_2 à partir de la mesure du rapport $\frac{U_{out}}{U_{in}}$ pour une impédance externe de $Z_{ex} = 1\Omega$ et de $Z_{ex} = 1000\Omega$.

b) Déterminer la précision des résultats en fonction de la précision de la mesure de tension effectuée avec un multimètre AM-500 dont les caractéristiques sont données ci-après.

c) Application numérique : selon le tableau 1

Gamme	Résolution	Précision
400,0 mV	0,1 mV	± (1,2 % + 3 chiffres)
4,000 V	1 mV	± (1,0 % + 3 chiffres)
40,00 V	10 mV	
400,0 V	100 mV	
600 V	1 V	± (1,2 % + 3 chiffres)

Table 2 – Données du fabricant au sujet de la précision du multimètre AM-500

Le diviseur de tension - Corrigé

a) **Mesure de l'impédance interne**

Une manière de déterminer les valeurs de R_1 et R_2 qui caractérisent l'impédance interne du diviseur de tension est d'effectuer des mesures de tension pour dans deux situations correspondant à des impédances externes différentes, par exemple $Z_1 = 1\Omega$ et $Z_2 = 1000\Omega$. Cela donne le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \left.\frac{U_{out}}{U_{in}}\right)_{Z_{ex}=1} = A_1 = \frac{R_2\ Z_1}{(R_1+R_2)Z_1+R_1R_2} \\ \\ \left.\frac{U_{out}}{U_{in}}\right)_{Z_{ex}>>1} = A_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{cases} \tag{3}$$

On garde $Z_1 = 1$ pour rester cohérent au niveau des unités. En résolvant ce système d'équation, on obtient les estimateurs pour R_1 et R_2 :

$$\begin{cases} R_1 = Z_1\ \frac{A_2-A_1}{A_1A_2} \\ \\ R_2 = Z_1\ \frac{A_2-A_1}{A_1(1-A_2)} \end{cases} \tag{4}$$

Que l'on peut ré-écrire en fonction des mesures de tension, avec l'indice $_{in}$ pour la tension d'entrée et $_{out}$ pour la tension de sortie, $_1$ pour la situation avec de 1 Ω et $_2$ pour la situation avec une très grande impédance :

$$\begin{cases} R_1 = Z_1\ \left(\frac{\mathrm{U}_{in,1}}{\mathrm{U}_{out,1}} - \frac{\mathrm{U}_{in,2}}{\mathrm{U}_{out,2}}\right) \\ \\ R_2 = Z_1\ \frac{U_{in,1}U_{out,2} - U_{in,2}U_{out,1}}{U_{out,1}(U_{in,2} - U_{out,2})} \end{cases} \tag{5}$$

b) **Calcul d'erreur**

Pour effectuer le calcul d'erreur, on va sommer les erreurs absolues de chaque terme multipliées par leurs dérivées premières :

$$\Delta_{R_i} = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial R_i}{\partial x_i} \Delta_{x_i} \right| \tag{6}$$

Il faut donc calculer maintenant les dérivées premières une par une. C'est long, mais à la fin ça se simplifie. On peut effectuer ce calcul en utilisant les fonctions de calcul symbolique sur Matlab.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1}{\partial U_{in,1}} &= \frac{Z_1}{U_{out,1}} && (7)\\
\frac{\partial R_1}{\partial U_{out,1}} &= -\frac{Z_1\ U_{in,1}}{U_{out,1}^2} && (8)\\
\frac{\partial R_1}{\partial U_{in,2}} &= -\frac{Z_1}{U_{out,2}} && (9)\\
\frac{\partial R_1}{\partial U_{out,2}} &= \frac{Z_1\ U_{in,2}}{U_{out,2}^2} && (10)\\
& && (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_2}{\partial U_{in,1}} &= \frac{Z_1\ U_{out,2}}{U_{out,1}(U_{in,2}-U_{out,2})} && (12)\\
\frac{\partial R_2}{\partial U_{out,1}} &= -\frac{Z_1\ U_{in,1}\ U_{out,2}}{U_{out,1}^2(U_{in,2}-U_{out,2})} && (13)\\
\frac{\partial R_2}{\partial U_{in,2}} &= -\frac{Z_1\ U_{out,2}\ (U_{in,1}-U_{out,1})}{U_{out,1}(U_{in,2}-U_{out,2})^2} && (14)\\
\frac{\partial R_2}{\partial U_{out,2}} &= \frac{Z_1\ U_{in,2}(U_{in,1}-U_{out,1})}{U_{out,1}(U_{in,2}-U_{out,2})^2} && (15)\\
& && (16)
\end{aligned}$$

Ensuite il faut recombiner ces différents termes. Les tensions sont toutes positives et $U_{in,i} > U_{out,i}$ donc :

$$\frac{\Delta_{R_1}}{Z_1} = \frac{1}{U_{out,1}}\Delta_{U_{in,1}} + \frac{U_{in,1}}{U_{out,1}^2}\Delta_{U_{out,1}} + \frac{1}{U_{out,2}}\Delta_{U_{in,2}} + \frac{U_{in,2}}{U_{out,2}^2}\Delta_{U_{out,2}} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_{R_2}}{Z_1} = & \frac{U_{out,2}}{U_{out,1}(U_{in,2}-U_{out,2})}\Delta_{U_{in,1}} + \frac{U_{in,1}U_{out,2}}{U_{out,1}^2(U_{in,2}-U_{out,2})}\Delta_{U_{out,1}}\\
& + \frac{U_{out,2}(U_{in,1}-U_{out,1})}{U_{out,1}(U_{in,2}-U_{out,2})^2}\Delta_{U_{in,2}} + \frac{U_{in,2}(U_{in,1}-U_{out,1})}{U_{out,1}(U_{in,2}-U_{out,2})^2}\Delta_{U_{out,2}}
\end{aligned} \tag{18}$$

c) **Application numérique**

-	R_1	R_2	Z_1	Z_2	U_{in}	ΔR_1	ΔR_2
1	10 Ω	20 Ω	1 Ω	100 Ω	100 V	±0.35 Ω	±2.26 Ω
2	10 Ω	10 Ω	1 Ω	100 Ω	100 V	±0.37 Ω	±1.0 Ω
3	100 Ω	100 Ω	1 Ω	100 Ω	100 V	±3.6 Ω	±0.96 Ω
4	100 Ω	100 Ω	1 Ω	100 Ω	100 V	±2.7 Ω	±8.6 Ω
5	100 Ω	100 Ω	1 Ω	1 kΩ	100 V	±2.7 Ω	±28.8 Ω
6	100 Ω	100 Ω	1 Ω	1 kΩ	10 V	±3.1 Ω	±19.7 Ω
7	100 Ω	10 Ω	1 Ω	1 kΩ	10 V	±7.0 Ω	±4.7 Ω

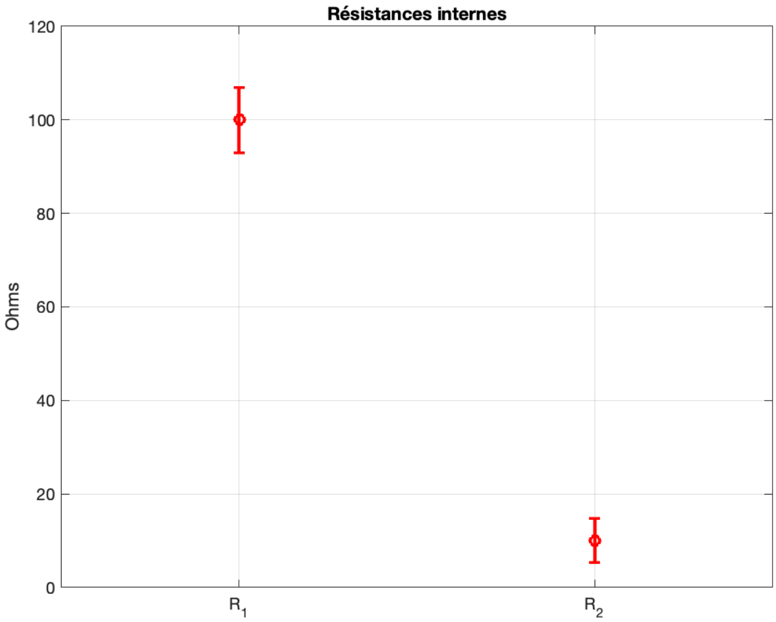

FIGURE 2 – Résultats du calcul de R_1et R_2 pour $U_in = 10V$ et l'impédance lors de la deuxième mesure $R_ex = 1\ k\Omega$ (cas 7)