7.1. **(Naturalité de l'exponentielle)**
Soit $\varphi : M \to N$ une isométrie entre deux variétés Riemanniennes. Montrer que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "d_p\varphi"] \arrow[d, "\exp_p"'] & T_{\varphi(p)}N \arrow[d, "\exp_{\varphi(p)}"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

7.2. Soit (M, g) est une variété riemannienne connexe et soient φ et ψ deux isométries de M telle qu'il existe un point $p \in M$ pour lequel

$$\varphi(p) = \psi(p) \quad \text{et} \quad d_p\varphi = d_p\psi.$$

Montrer que φ et ψ coïncident partout.

7.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne et soit $f_p : M \to \mathbb{R}$ définie par $f_p(q) = d_g(p, q)$, où d_g est la distance induite par la métrique g.
Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U} \subseteq M$ de p tel que f_p est différentiable sur $\mathcal{U}\backslash\{p\}$ et que pour tout $q \in \mathcal{U}\backslash\{p\}$,

$$\operatorname{grad}(f_p)_q = \dot{\gamma}(f_p(d))$$

où γ est la géodésique unitaire de p à q.

7.4. Soient (M, g) une variété Riemannienne, $p, q \in M$ et $\mathcal{C}_{pq} = \{\gamma : [0, 1] \to M | \gamma \text{ est une courbe lisse et } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$ qu'on muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit $\ell : \mathcal{C}_{pq} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par $\ell(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))^{\frac{1}{2}} dt$ la fonction "longueur de courbe".

(a) Montrer que cette fonction n'est pas continue.

(b) Montrer que ℓ est semi-continue inférieurement (c'est à dire: Si une suite $(\gamma_i)_i$ de chemins converge ponctuellement vers $\gamma(t)$, alors $\liminf_{i\to\infty} \ell(\gamma_i) \geq \ell(\gamma)$).

(c) Proposer une topologie sur les courbes $\mathcal{C}^1$ pour laquelle ℓ est continue.

7.5. Soit (M, g) une variété riemannienne et $x, y \in M$ deux points de M. Supposons qu'il existe deux géodésiques distinctes γ_1,γ_2 reliant x à y. Montrer qu'aucune de ces géodésiques n'est minimisante après le point y.