Application exponentielle, suite.

Rappel Soit (M, g) une variété (semi)-riemannienne.

On rappelle que une courbe $\gamma : [a,b] \to M$ est **géodésique** si $\gamma \in C^2$ et $\nabla_t \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \quad (\forall t)$

En coordonnées locales $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$

une géodésique est donc solution du système d'EDO

$$\ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) \cdot \dot{x}^i \cdot \dot{x}^j = 0$$

En appliquant le théorème d'existence, d'unicité et de dépendance par rapport aux cond. initiales par ce type de système on déduit :

<u>Proposition</u> Pour tout $p \in M$ et $v \in T_pM$ il existe un intervalle (maximal) $J_{p,v} \subset \mathbb{R}$, contient 0 et t.q. il existe une géodésique

$$\gamma_{p,v}(t) = \gamma_v(t) \in M \qquad (t \in J_{p,v})$$

vérifiant les conditions initiales

$$\gamma_v(0) = p \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}_v(0) = v$$

De plus l'application

$$(p, v, t) \longmapsto \gamma_{p,v}(t)$$

est différentiable dans son domaine de définition.

Lemme Pour $0 < \lambda \leq 1$ alors on a

$$\gamma_v(\lambda t) = \gamma_{\lambda v}(t),$$

Preuve Notons $\alpha(t) = \gamma_v(\lambda t)$, alors $\alpha(0) = \gamma_v(0) = p$, de plus

$$\dot{\alpha}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \gamma_v(\lambda t) = \lambda \cdot \frac{d}{dt}\Big|_0 \gamma_v(t) = \lambda \cdot \dot{\gamma}_v(0)$$

$$= \lambda v$$

Donc par définition, $\gamma_v(\lambda t) = \alpha(t) = \gamma_{\lambda v}(t)$

(il est clair aussi que $\nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} = 0$). #

Corollaire Si on note $\Omega_p = \{ v \in T_p M \mid 1 \in J_{p,v} \}$

alors $\Omega_p \subset T_p M$ est un domaine étoilé en 0.

Explication : Ω_p est l'ensemble des vecteurs de $T_p M$

tels que la géodésique $\gamma_v(t)$ est définie

par $0 \leq t \leq 1$. Le lemme dit que

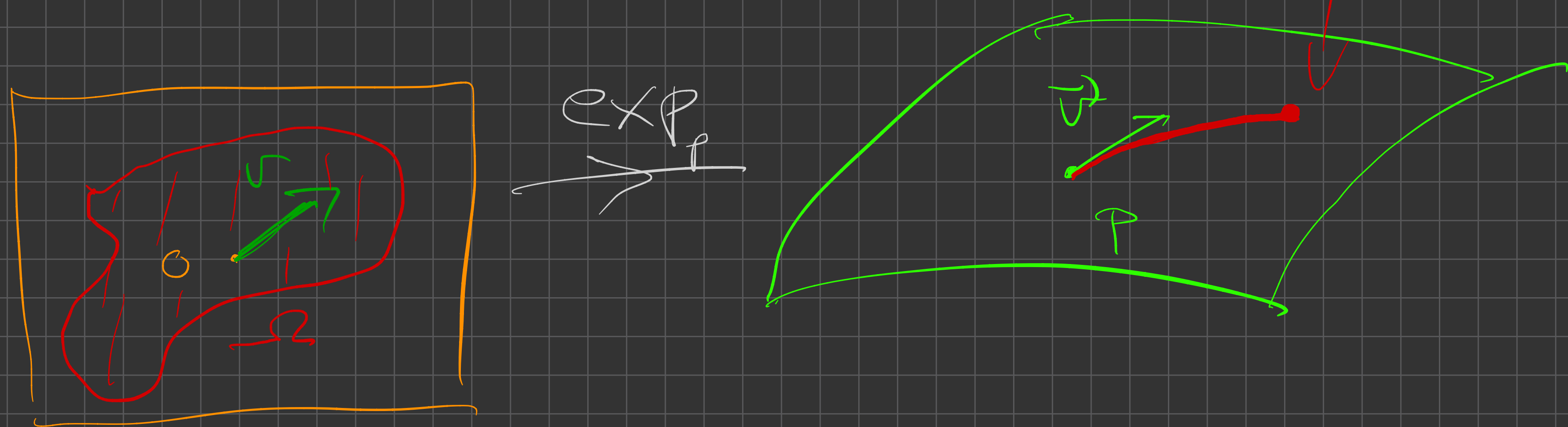
$$v \in \Omega_p, \ \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda v \in \Omega_p$$

Déf L'application exponentielle (par la métrique g)

au point p est définie par

$$\begin{cases} \exp_p : \Omega_p \longrightarrow M \\ \exp_p(v) = \gamma_v(1) \end{cases}$$

$\exp_p(v) = \gamma_v(1)$



$T_p M$

<u>Remarque</u> Par construction la géodésique issue de p en direction de $v \in T_p M$ est $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$

<u>Prop</u> L'application $\exp_p : \Omega_p \subset T_p M \longrightarrow M$ est différentiable et c'est un difféomorphisme local entre un voisinage W_p de $0 \in T_p M$ et un voisinage U_p de $p \in M$.

De plus

$$d_0(\exp_p) : T_0 \Omega_p = T_p M \longrightarrow T_p M$$

est l'application identité.

<u>Preuve</u> La différentiabilité (disons C^∞ si $g \in C^\infty$) vient de la théorie des EDO.

L'application est un difféomorphisme local au voisinage de $0 \in \Omega_p$ par le théorème d'inversion locale, si on prouve que sa différentielle $(T_0 \Omega_p \to T_p M)$ est inversible

C'est le cas puisque on affirme que $d_0 \exp_p = Id_{T_p M}$ en effet on a

$$T_0 \Omega_p = T_p M \quad \text{car} \quad \Omega_p \text{ est un ouvert de } T_p M$$

et
$$d_0(\exp_p)(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\exp_p(\alpha(t))\right)$$

où $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega_p$ est une courbe qui représente v.

On prend $\alpha(t) = tv$ on a donc

$$d_0(\exp_p)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_p(tv) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_v(t)$$

$$= v \quad (\text{par définition de } \gamma_v)$$

#

<u>Définition</u> Notons $\rho \geq 0$ le suprémum des $r > 0$ tels que $B(0,r) = \{ w \in T_pM \mid \|w\| = \sqrt{g_p(w,w)} \} \subset T_pM$ est contenue dans W_p (le domaine où $\exp_p$ est un difféomorphisme).

Alors $\rho = \rho(p)$ s'appelle le rayon d'injectivité (de l'exponentielle) au point p.

Résumé : Pour chaque point $p \in M$ il existe $\rho(p) > 0$ tel que si $r < \rho(p)$ alors l'exponentielle $\exp_p$ est un difféo de $B(0,r) \subset T_pM$ sur son image (qui est un voisinage de $p \in M$).

Si on choisit une base orthonormée $e_1, \dots, e_n \in T_pM$ alors on définit un système de coordonnées sur le voisinage $U_p = \exp_p(B(0,r))$

en posant

$$\varphi(q) = (x^1, \dots, x^n) \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \leq r$$

et.

$$\exp_p\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i\right) = q$$

<u>Déf</u> : De telles coordonnées au voisinage de p s'appellent des coordonnées normales de Riemann (ou des coordonnées exponentielles).

<u>Lemme</u> Dans les coordonnées normales on a

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij}, \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0, \qquad \Gamma_{ij}^{k}(0) = 0$$

Interprétation : Dans ces coordonnées la métrique Riemannienne g_{ij} est approximée à l'ordre 2 par la métrique euclidienne δ_{ij}

On dit que la métrique euclidienne dans T_pM est <u>osculatrice</u> à la métrique riemannienne.

<u>Remarque</u> En général $\dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \neq 0$

ces quantités sont liées à la courbure de g.

<u>Preuve du lemme</u> le point p correspond aux coordonnées $x^i = 0$ $(i = 1, \dots, p)$. La condition

$g_{ij} = \delta_{ij}$ vient du fait que $d_0 \exp_p = Id_{T_pM}$ (et de fait qu'on a choisit une base orthonormée).

Pour voir que $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ on remarque que pour tout $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n \cong T_pM$ on a

$$\gamma_a(t) = \exp_p(at) = (ta^1, \dots, ta^n) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

Or l'équation des géodésique est

$$\ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(t)) \cdot \dot{x}^i \dot{x}^j$$

Si $x^i(t) = a^i t$, $\Rightarrow$ $\dot{x}^i = a^i$, $\ddot{x}^i = 0$

Donc on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(0)\, a^i a^j = 0 \quad , \quad \forall\, a=(a^1,\dots,a^n)$$

Donc $\quad \Gamma_{ij}^{k}(0) = 0 \quad \forall\, k, \ \forall\, i, j$

Pour voir que $\partial_k g_{ij} = 0$ on utilise

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ij}^{m}\, g_{mk} + \Gamma_{ik}^{m}\, g_{jm}$$

#

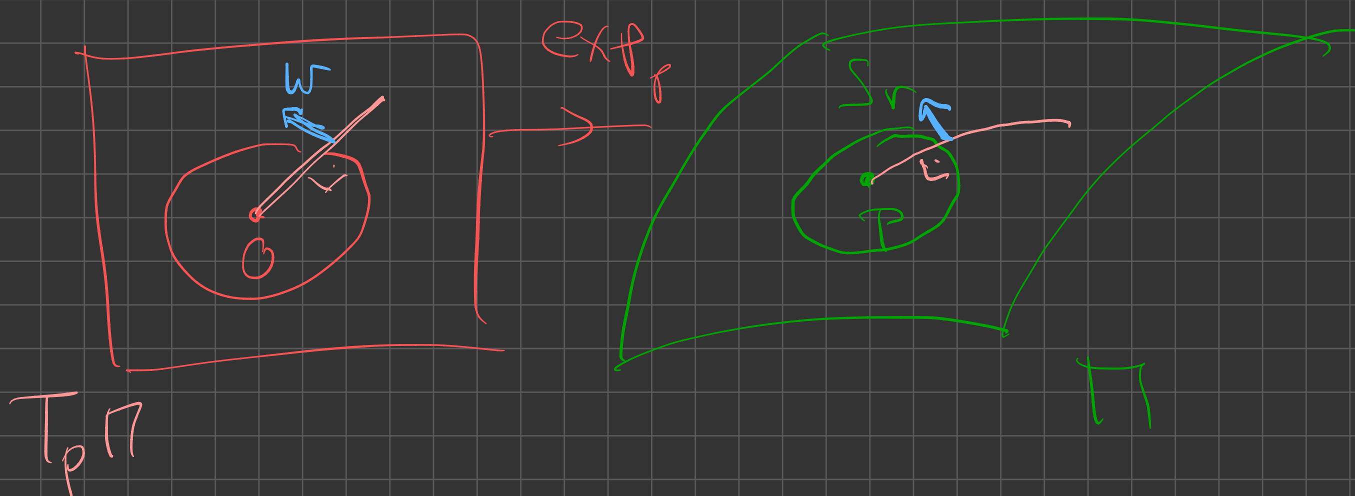
Théorème (lemme de Gauss)

Soit $p \in M$ un point d'une variété riemannienne et $U_p \subset M$ un voisinage où l'exponentielle est un difféomorphisme.

Pour $r > 0$ assez petit, on note

$$S_{p,r} = \exp_p \{ v \in T_pM \mid \|v\| = r \}$$

Alors toute géodésique issue de p est orthogonale à $S_{p,r}$.



<u>Preuve</u> Soit $v \in T_pM$, $(v \neq 0)$ $(r = \|v\| < \rho$, le rayon d'injectivité$)$.

On doit montrer que $\dot{\gamma}_r(1) \perp T_{\gamma_r(r)} S_r$

Soit $w \in T_pM$ tq $w \perp v$ (on peut prendre $\|w\| = \|v\| = r$). On doit montrer que

$$d_v(\exp_p)(w) \perp \dot{\gamma}_v(1) = d_v(\exp_p)(v)$$

Pour étudier $d_v(\exp_p)(w)$ on doit trouver une courbe qui représente w puis dériver $\exp_p$ le long de cette courbe.

On définit $\lambda(s) = \cos(s)v + \sin(s)w \in T_pM$

alors $\lambda(0) = v$, $\dot\lambda(0) = w$ et $\|\lambda(s)\| = r$ $\forall s$ (car $w \perp v$ et $\|w\| = \|v\| = r$)

Donc

$$d_v(\exp_p)(w) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(\lambda(s))$$

(On doit voir que ce vecteur est $\perp \dot\gamma_v(r)$.

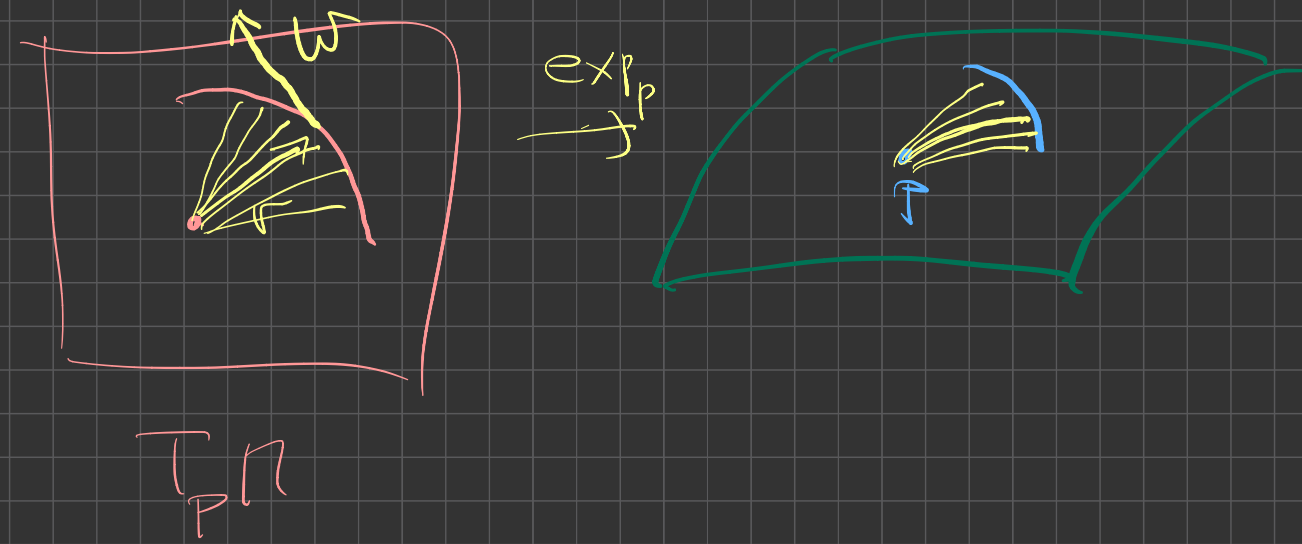
On va utiliser la formule de variation première :

On pose

$$\varphi(s,t) = \exp_p(t\lambda(s))$$

Alors $\varphi(s,t)$ est une variation de la géodésique

$$\gamma_v(t) = \exp_p(tv) = \exp_p(t\lambda(0)) = \varphi(t,0)$$



Par construction, la longueur de la courbe $t \mapsto \varphi_s(t) = \varphi(t,s)$ vaut r pour tout s (on paramétrise de $0 \leq t \leq 1$)

La formule de variation première dit que

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \ell(\varphi_s) = \frac{1}{r}\left[\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \dot\gamma \right\rangle \Big|_{t=0}^{1} - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \nabla_t \dot\gamma \right\rangle dt \right]$$

Or $\nabla_t \dot{\gamma} = 0$, et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ en $t = 0$

(Car $\varphi(s, 0) = \exp_p(0 \cdot \lambda(s)) = p$.)

$\Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_0 \ell(\varphi_s) = \frac{1}{r} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0), \dot{\gamma}_v(1) \right\rangle$$

Donc

$$\dot{\gamma}_v(1) \perp \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0) = d_v(\exp_p)(w)$$

#