3.1. (a) La métrique s'écrit matriciellement

$$g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'élément de volume

$$dv_g(x,y) = \frac{dxdy}{y^2}.$$

C'est avec cette mesure que l'on calcule une aire hyperbolique. Soit donc

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{H}^2 \ , \ 1 \leqslant x \leqslant a \ \text{ et } \ b \leqslant y\right\}.$$

Alors,

$$\int_T dv_g(x,y) = (a-1)\int_b^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{a-1}{b}.$$

On note que cette aire est finie pour la mesure de volume hyperbolique et infinie pour la mesure euclidienne. Cela vient du fait que la mesure hyperbolique contracte les longueurs des points loin de l'axe réel. Ainsi deux points de même ordonnée sur les droites verticales du triangle sont à distance euclidienne constante tandis qu'ils se rapprochant exponentiellement vite pour la distance hyperbolique.

(b) Montrons déjà qu'une telle application laisse le demi-plan supérieur invariant :

$$\Im f(z) = \Im\left(\frac{(a(x+iy)+b)(c(x-iy)+d}{|cz+d|^2}\right) = \frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2}$$

Puisque $ad-bc > 0$, on conclut que $\Im f(z) > 0$. Montrons maintenant que f est une isométrie. Puisque f est clairement holomorphe, il est commode de raisonner en termes complexes. Cela facilite le calcul de la différentielle de f : $d_z f \cdot u = f'(z)u = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}u$. On rappelle aussi que $< u, v >= \Re(u\bar{v})$. Ainsi

$$\begin{aligned}
(f^*h)_z(u,v) &= h_{f(z)}(d_z f \cdot u, d_z f \cdot v) \\
&= \frac{1}{(\Im f(z))^2}\Re(f'(z)u, f'(z)v) \\
&= \frac{|cz+d|^2}{(\Im z)^2(ad-bc)^2}\Re\left(\frac{(ad-bc)u}{(cz+d)^2}\overline{\left(\frac{(ad-bc)v}{(cz+d)^2}\right)}\right) \\
&= \frac{\Re(u\bar{v})}{(\Im z)^2} \\
&= h_z(u,v).
\end{aligned}$$

(c) On fixe ξ et on résout l'équation en z,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \xi.$$

On trouve

$$f^{-1}(\xi) = \frac{d\xi - b}{-\xi c + a}$$

et $\xi \neq \frac{a}{c}$ car ξ ne peut être réel ($\Im \xi > 0$).

On remarque que si $ad - bc = 1$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et si f est l'isométrie de $\mathbb{H}^2$ qui correspond à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors f^{-1} est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$.

(d) et (e)

i. Montrons tout d'abord que φ est à valeurs dans $\mathbb{H}^2$:

$$\begin{aligned} \Im \varphi(z) &= \Im \left(\frac{-i(x+iy+1)(x-iy-1)}{|z-1|^2} \right) \\ &= \cdots \\ &= \frac{1-x^2-y^2}{|z-1|^2} > 0 \end{aligned}$$

car $x^2 + y^2 < 1$.

ii. φ est holomorphe.

iii. L'équation $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ conduit facilement à $z_1 = z_2$ donc φ est injective.

iv. On montre que φ est surjective et on calcule son inverse en résolvant l'équation en z, $\varphi(z) = \xi$. On trouve

$$z = \varphi^{-1}(\xi) = \frac{1 + i\xi}{i\xi - 1}$$

et on constate au passage que l'inverse est holomorphe.

(f) On calcule $\varphi^* h$ On rappelle qu'on a déjà calculé $\Im \varphi(z)$ et qu'on peut différentier φ comme une fonction holomorphe. On trouve tous calculs fais,

$$(\varphi^* h)_z(u, v) = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} \Re(u\bar{v}).$$

On en déduit que

$$g_z = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

3.2. (a) Les géodésiques sont, par définition, des points critiques pour le lagrangien énergie. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2u}{y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = 2\frac{v}{y^2}$$

puis, en dérivant par rapport au temps,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{y^2}\left(\ddot{x} - 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y^2}\left(\ddot{y} - 2\frac{\dot{y}^2}{y}\right).$$

Les équations d'Euler-Lagrange se traduisent donc en

$$\ddot{x} = 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}, \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}.$$

On verra plus tard comment décrire géométriquement ces courbes.

(b) Il suffit d'appliquer les résultat de (d) i. et de (e) de l'exercice suivant.

3.3. On rappelle les équations d'Euler-Lagrange pour une courbe critique : pour tout $i = 1, \cdots, n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma, \dot\gamma) = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i}(\gamma, \dot\gamma).$$

(a) Soit x une courbe critique pour f et soit α la fonction de t donnée par

$$\alpha(t) = A(x(t), \dot x(t)) = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial v^i}(x(t)\dot x(t)) - f(x(t)\dot x(t)).$$

Il s'agit de montrer que que $\frac{d\alpha}{dt} = 0$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt}(t) &= \sum_i \ddot{x}^i(t)\frac{\partial f}{\partial v^i}(x(t), \dot x(t)) + \dot{x}^i(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i}(x(t), \dot x(t)) - \frac{d}{dt}f(x(t), \dot x(t)) \\
&= \sum_i \ddot{x}^i(t)\frac{\partial f}{\partial v^i}(x(t), \dot x(t)) + \dot{x}^i(t)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x(t), \dot x(t)) - \frac{d}{dt}f(x(t), \dot x(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Remarquer que le calcul nécessite que f soit autonome.

(b) La relation d'Euler se prouve en dérivant l'égalité $h(\lambda v) = \lambda^r h(v)$ par rapport à λ puis à poser $\lambda = 1$.
On a donc $f(x, v) = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial v^i}v^i$. On dérive cette expression par rapport à t; on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(x, \dot x) &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial v^i}v^i\right) \\
&= \frac{1}{r}\left[v^i\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i} + \dot{v^i}\frac{\partial f}{\partial v^i}\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[v^i\frac{\partial f}{\partial x^i} + \dot{v^i}\frac{\partial f}{\partial v^i}\right] \\
&= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}f(x, \dot x)
\end{aligned}$$

et, puisque $r \neq 1$, on conclut que $\frac{d}{dt}f(x, \dot x) = 0$.

(c) La fonction $f(x, v) = \frac{1}{2}m \cdot g_{ij}(x)v^iv^j - U(x)$ est clairement homogène (de degré 2) en v. On peut donc appliquer le résultat précédent.

(d) i. L'énergie est constante le long d'une courbe critique : c'est un cas particulier de la question précédente lorsque $U = 0$.
   ii. Si l'énergie est constante, alors la vitesse est constante (prendre la racine carrée).

(e) Si $f(x^1 \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n)$ ne dépend pas de la coordonnée x^i, alors d'après Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0.$$

3.4. There are two steps in this problem. The first step requires an idea from linear algebra.

Step 1: We compute the determinant of the matrix of the pullback metric g on $U \subset \mathbb{R}^n$. This matrix is precisely $I_n + a \cdot a^T$ where a is the gradient vector of the function φ. It is easy to check that a is an eigenvector with eigenvalue $1 + ||a||^2$. The eigenvalue 1 has multiplicity $n-1$, and the corresponding eigenspace consists of the space of vectors orthogonal to a. Since the determinant of this matrix is the product of its eigenvalues, we obtain that this equals $1 + ||a||^2$.

It follows that

$$Vol(S_\varphi) = \int_U \sqrt{1+||a||^2}dx$$

Step 2: The normal vector to the surface at the point $\varphi(x)$ is $(a,-1)$. We obtain that

$$Cos(\theta(x)) = \frac{(a,-1)\cdot b}{||(a,-1)||||b||} = -\frac{1}{\sqrt{1+||a||^2}}$$

This means that

$$\int_U \frac{1}{|Cos(\theta(x))|}dx = \int_U \sqrt{1+||a||^2}dx$$

which is what we wish to prove.

3.5. Cet exercice est difficile et un peu en marge du programme; la correction est moins détaillée.

(a) Notons $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire sur T_eG. Soit maintenant g un point quelconque de G. Pour définir un produit scalaire sur T_gG, on ramène les vecteurs tangents en g en des vecteurs tangents en e via $L_{g^{-1}}$ et on applique $<\cdot,\cdot>$. Ainsi, on pose,

$$<x,y>_g = <d_gL_{g^{-1}}\cdot x, d_gL_{g^{-1}}\cdot y>.$$

On construit de cette manière une métrique sur G. L'invariance à gauche de cette métrique est naturelle par construction mais vérifions-le quand même.

$$\begin{array}{rcl} L_\gamma^* <\cdot,\cdot>_g (x,y) & = & <\cdot,\cdot>_{\gamma g} (d_gL_\gamma\cdot x, d_gL_\gamma\cdot y) \\ & = & <d_{\gamma g}L_{g^{-1}\gamma^{-1}}d_gL_\gamma\cdot x, d_{\gamma g}L_{g^{-1}\gamma^{-1}}d_gL_\gamma\cdot y> \end{array}$$

Pour poursuivre le calcul on constate que $L_{g^{-1}\gamma-1} = L_{g^{-1}}\circ L_{\gamma-1}$ et on dérive cette application en utilisant la règle de Leibniz. On a donc

$$d_{\gamma g}L_{g^{-1}\gamma^{-1}} = d_gL_{g^{-1}}\circ d_{\gamma g}L_{\gamma^{-1}}.$$

Il faut maintenant appliquer cette application linéaire au vecteur $d_gL_\gamma\cdot x$. Or, en utilisant encore une fois la règle de Leibniz, la quantité

$$d_{\gamma g}L_{\gamma^{-1}}\circ d_gL_\gamma\cdot x$$

se simplifie en

$$d_g(L_\gamma\circ L_{\gamma-1}\cdot x = d_gId\cdot x = x.$$

On obtient finalement

$$L_\gamma^* <\cdot,\cdot>_g (x,y) = <x,y>_g$$

ce qu'on voulait.

On passe maintenant au cas du volume. Le résultat est intuitivement évident : puisque la métrique est invariante à gauche et puisqu'un volume est un produit de longueur, le volume est aussi invariant à gauche.

Pour traiter les questions suivantes, nous avons besoin de montrer que la forme de Haar est unique à multiplication près par un nombre réel. Soit en effet deux formes volume invariantes à gauche, ω_1 et ω_2. On sait que l'espace des formes volume est un $\mathcal{C}^\infty(M)$-module de dimension 1. il existe donc une fonction φ sur M telle que

$$\omega_1 = \varphi\omega_2.$$

Si de plus ω_1 et ω_2 sont invariantes à gauche, nous allons montrer que cette fonction φ est constante. Soit donc g_1 et g_2 deux points de G et soit $u_1, \cdots, u_n$ une base de $T_{g_1}G$. Alors

$$\varphi(g_1) = \frac{(\omega_1)_{g_1}(u_1, \cdots, u_n)}{(\omega_2)_{g_1}(u_1, \cdots, u_n)} = \frac{(\omega_1)_{g_2}(d_{g_1}L_{g_2 g_1^{-1}} \cdot u_1, \cdots, L_{g_2 g_1^{-1}} \cdot u_n)}{(\omega_2)_{g_2}(L_{g_2 g_1^{-1}} \cdot u_1, \cdots, L_{g_2 g_1^{-1}} \cdot u_n)} = \varphi(g_2).$$

La deuxième égalité provient justement du fait que les formes sont invariantes à gauche.

(b) i. Ce point est clair; dans un groupe abélien, les multiplications à droite et à gauche coïncident.

ii. Par définition la fonction modulaire décrit le "manque d'invariance à droite" dans le groupe G. Elle est définit comme suit. Prenons une forme ω invariante à gauche et soit g dans G. La forme $R_g^*\omega$ est encore une forme invariante à gauche (l'associativité dans G exprime précisément que R_{g_1} et L_{g_2} commutent). Donc, par unicité modulo multiplication de ω, il existe $\alpha(g) \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$R_g^*\omega = \alpha(g)\omega.$$

Il est facile de vérifier que cette fonction α est un morphisme de groupes continu de G dans $(\mathbb{R}^*, \times)$. Si G est un groupe compact, l'image de α, $\alpha(G)$ est donc un sous-groupe compact de $(\mathbb{R}^*, \times)$. Il n'en existe qu'un seul, le groupe trivial $\{1\}$. Ceci montre que G est unimodulaire.

iii. Cette question es vraiment difficile. Il faut raisonner par récurrence sur une suite de nilpotence de G et se ramener au cas abélien.

(c) i. Commençons par décrire explicitement les difféomorphismes L_g : posons $g = (x, y)$. On vérifie, en composant deux transformations affines que

$$L_g(\alpha, \beta) = (y\beta + x, y\alpha).$$

On vérifie aussi que, si $g = (x, y)$, son inverse est donné par $g^{-1} = (\frac{-x}{y}, \frac{1}{y})$. Ainsi, pour $g = (x, y)$, $L_{g^{-1}}$ est le difféomorphisme

$$L_{g^{-1}}(\alpha, \beta) = (\frac{\alpha}{y}, \frac{v}{y} - \frac{x}{y})$$

qui est facile à dériver puisqu'il est linéaire. On a, par exemple en g

$$d_g L_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}.$$

Le résultat en découle.

ii. La forme de Haar est par exemple

$$\omega_{(\alpha,\beta)}(u, v) = \frac{1}{\beta^2} u_1 v_1 + u_2 v_2$$

(voir l'exo précédent). Cette fois, R_g est le difféomorphisme

$$R_g(\alpha, \beta) = (y\alpha, x\alpha + \beta)$$

(on a noté $g = (x, y)$) qui est encore linéaire de différentielle

$$d_{(\alpha,\beta)} R_g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

On a maintenant tout ce qu'il faut pour calculer le rappel de ω par R_g. On trouve

$$(R_g^*\omega)_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha^2 y^2} \left(x^2 u_1 v_1 + y^2 u_2 v_2 \right)$$

ce qui n'est pas du tout la même chose que ω.

(d) Dans cette question on suppose que le groupe G est compact (donc unimodulaire d'après ce qui précède). On fixe g une métrique invariante à gauche.

   i. C'est clair puisque G est compact.

   ii. Fixons une métrique $< \cdot, \cdot >$ sur G qui est invariante à gauche et notons ω une forme de Haar associée. L'idée est, puisque G est de volume fini, d'utiliser une opération de moyenne par rapport à la mesure de Haar de G. On définit une nouvelle métrique sur G par

$$u \bullet v_g = \int_G R_\gamma^*(< \cdot, \cdot >)_g(u, v) d\omega(\gamma).$$

   et on vérifie qu'elle est invariante à droite et à gauche.