

Méthodologie des plans d'expériences

Cours EE206

Jean-Marie Fürbringer

May 3, 2021

Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Éléments de modélisation statistique
- 3 Plans de Hadamard
 - Exercice 1
- 4 Plans de Doehlert
 - Exercice 2
- 5 Conclusions

1. Introduction

1.1 Objectifs pédagogiques

- Comprendre des éléments de stratégies expérimentales
- Connaître deux stratégies classiques
- Revisiter la régression multilinéaire pour en faire un outil courant

1.2 Objectifs du DOE

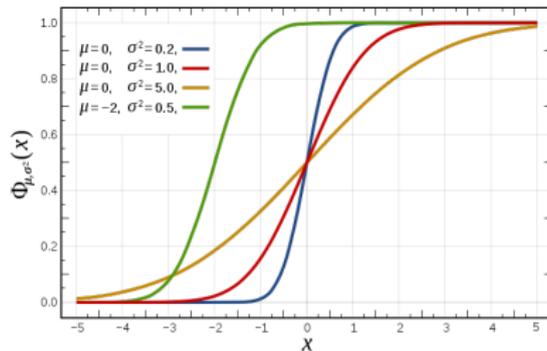
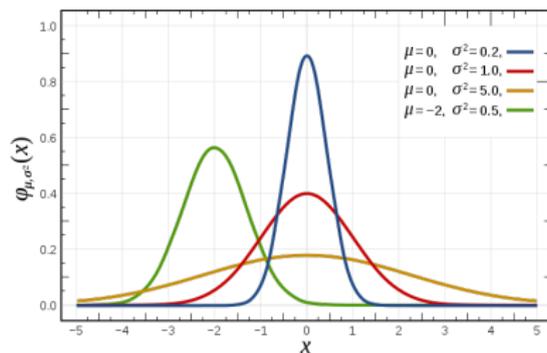
- **Expériences scientifiques:** déterminer les relations de cause à effet
- **Expériences industrielles:** faire une analyse de Pareto, optimiser un processus,
- **Contingences:** le temps, les coûts, les batches, la sécurité, ...

1.3 Sir Ronald Fisher (1890-1962)

- Station agronomique de Rothamsted, 1919
- Trop de recherches non conclusives
- Collaboration statisticien-expérimentateur
- Invention ANOVA et DOE
- Statistical Methods for Research Workers (1925) (~ au *Principia* de Newton)
- The Design of Experiments (1935)
- Fondateur du néo-darwinisme et de la génétique moderne



1.4 La distribution Normale



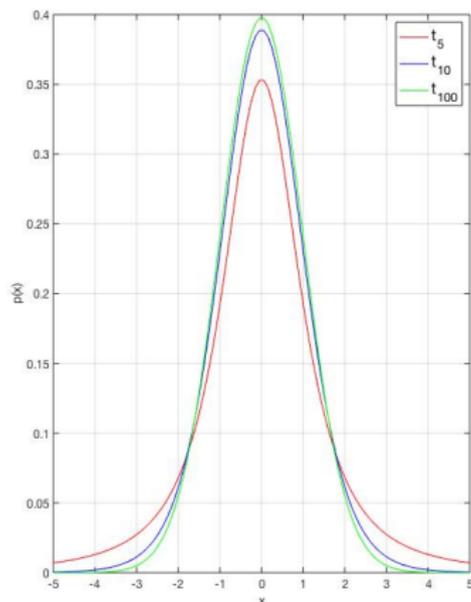
1.5 Données vs distributions

- Données de base: $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ avec $0 \leq i \leq n$
- Linéaire: $a_j = \sum_i x_{ij} Y_i \sim N\left(\mu = \sum x_{ij} \mu_i, \sigma = \sqrt{\sum x_{ij} \sigma_i^2}\right)$
- Moyenne: $\sqrt{n-1} \left(\frac{\bar{Y} - \mu}{s}\right) \sim T(n-1)$
- Fonction quadratique: $(a_j)^2 \sim \chi^2(w_j)$
- Rapport fonctions quadratiques: $\frac{(a_j)^2}{(a_i)^2} \sim F(w_j, w_i)$

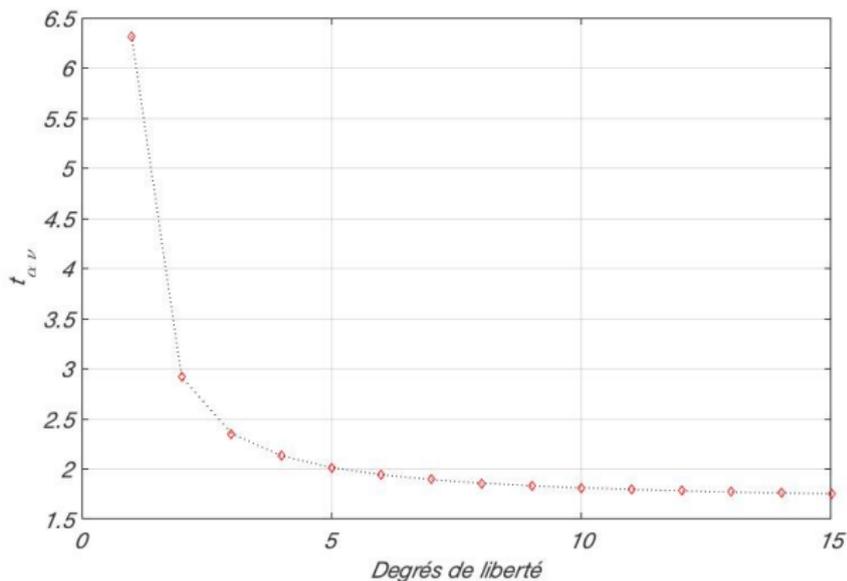
1.6 Distribution t de Student et intervalle de confiance

- Publié par William Gosset, 1908, (Guinness)
- Définition:
Si $Z \sim N(\mu, \sigma)$ et $U \sim \chi^2(k)$ alors
$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}} \sim t(k)$$
- Intervalle de confiance pour $p = \alpha$:

$$x = \bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}^{n-1} \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$



1.7 Influence du degré de liberté sur $t_{0.05}^{\nu}$



1.8 Mindmap d'analyse d'un cas

- A faire dans la discussion initiale
- A maintenir tout le long du projet
- A main levée ou avec un programme
- Quelques programmes :
 - Freemind
 - iMindmap
 - Mindjet

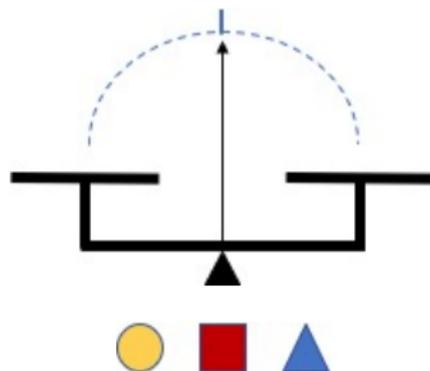


1.9 Pesée de trois objets

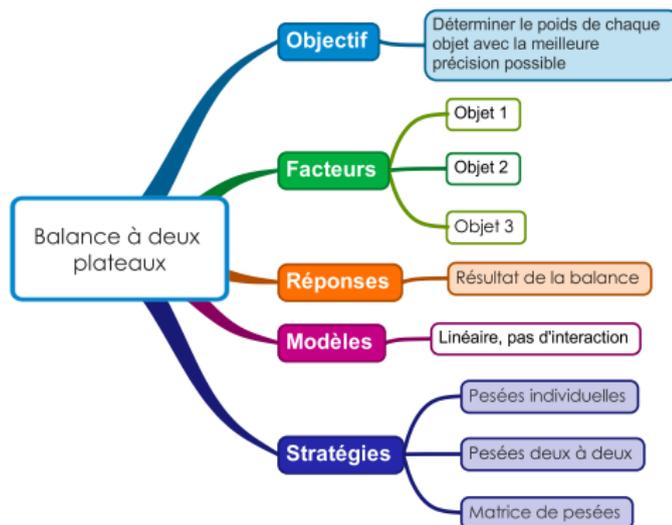
Données du problème

Mesurer le poids de trois objets avec la meilleure précision pour un coût raisonnable:

- Les objets ont des poids de même ordre de grandeur
- On dispose d'une balance à deux plateaux dont la précision est décrite par une erreur absolue constante (variance= σ^2)

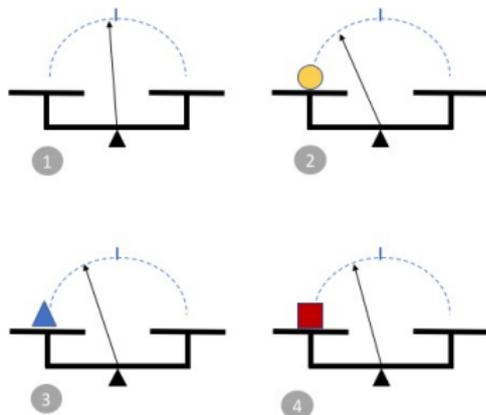


1.10 Pesée de trois objets



1.11 Stratégie 1: Peser les objets un à un

- Quatre mesures
- Une mesure sans objet pour déterminer le zéro (l'offset) de la balance
- Un seul objet à la fois sur un des deux plateaux

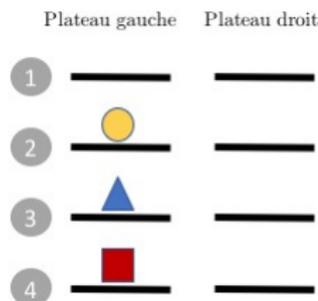


Questions:

- Quel est le poids de chaque objet?
- Quelle est la précision de la mesure?

1.11 Stratégie 1: Peser les objets un à un

- Quel est le poids de chaque objet?
- Quelle est la précision de la mesure?

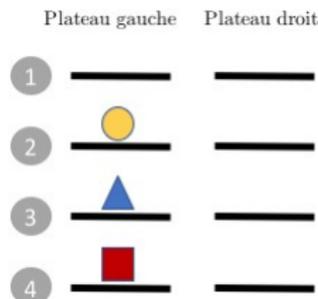


$$\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m_0 = R_0 \\ m_i = R_0 - R_i \end{cases}$$

1.11 Stratégie 1: Peser les objets un à un

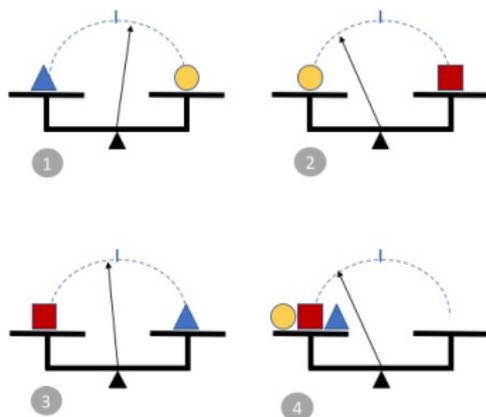
- Quel est le poids de chaque objet?
- Quelle est la précision de la mesure?



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{var}(m_o) = \text{var}(R_o) = \sigma^2 \\ \text{var}(m_i) = \text{var}(R_o - R_i) \\ \quad = \text{var}(R_o) + \text{var}(R_i) \\ \quad = 2\sigma^2 \end{array} \right.$$

1.12 Stratégie 2: Peser les objets deux à deux

- Quatre mesures
- Trois mesures deux objets sont comparés
- Une mesure les trois objets sont pesés ensemble

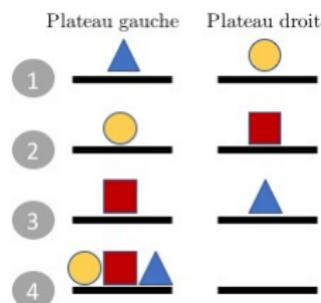


Questions:

- Quel est le poids de chaque objet?
- Quelle est la précision de la mesure?

1.12 Stratégie 2: Peser les objets deux à deux

- Quel est le poids de chaque objet?



$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = X\vec{m} \Rightarrow \vec{m} = X^{-1}\vec{R}$$

1.12 Stratégie 2: Peser les objets deux à deux

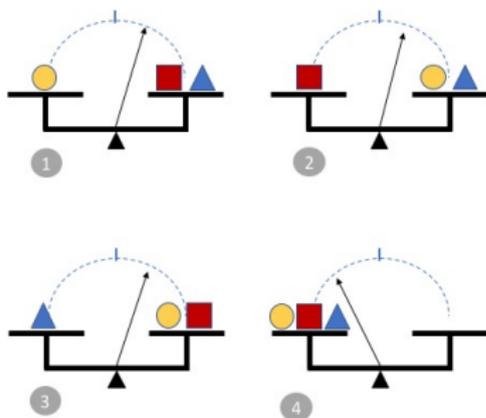
- Quelle est la précision de la mesure?

- $$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

- $var(\vec{m}) = var(X^{-1}\vec{R}) = (X^T X)^{-1} var(\vec{R}) = D var(\vec{R})$
- $var(m_i) \approx D_{ii} \sigma^2$
- $D_{00} = 1/3 \quad D_{11} = D_{22} = D_{33} = 10/27$

1.13 Stratégie 3: Trois objets à chaque mesure

- Quatre mesures
- Pour trois mesures deux objets sont mesurés contre un troisième
- Pour une mesure les trois objets sont pesés ensemble

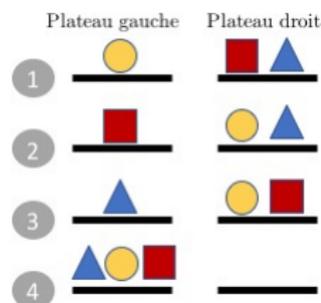


Questions:

- Quel est le poids de chaque objet?
- Quelle est la précision de la mesure?

1.13 Stratégie 3: Trois objets à chaque mesure

- Quel est le poids de chaque objet?



$$\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = X\vec{m} \Rightarrow \vec{m} = X^{-1}\vec{R}$$

1.13 Stratégie 3: Trois objets à chaque mesure

- Quelle est la précision de la mesure?

- $$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

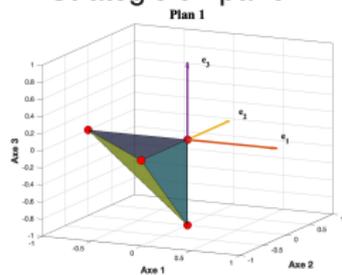
- $var(\vec{m}) = var(X^{-1}\vec{R}) = (X^T X)^{-1} var(\vec{R}) = D var(\vec{R})$
- $var(m_i) \approx D_{ii} \sigma^2$
- $D_{00} = D_{11} = D_{22} = D_{33} = 1/4$

1.14 Conclusion

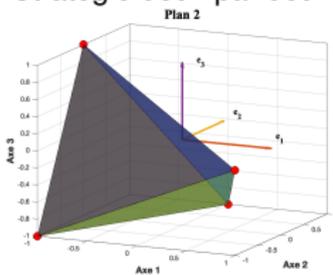
- Pour le même coût, suivant comment sont placés les points de mesure, il est possible d'avoir des résultats plus ou moins précis
- Le "truc" est de visiter l'ensemble de l'espace expérimental et de s'arranger pour que les coefficients soient estimés à partir du plus grand nombre possible de données
- La "stratégie" utilisée ici est un plan de Hadamard

1.15 Meilleure visite du domaine

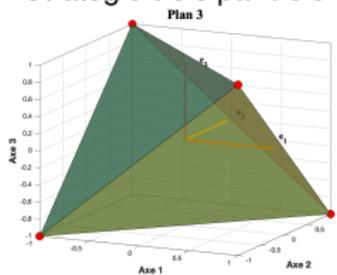
Stratégie un par un



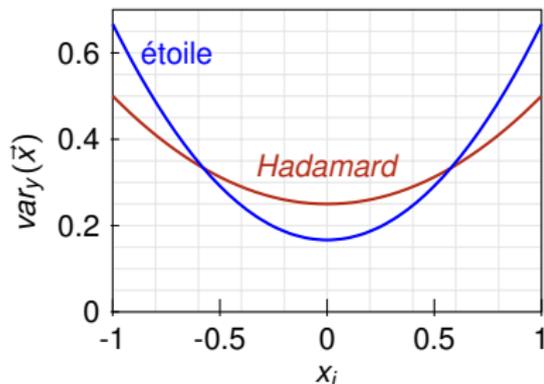
Stratégie deux par deux



Stratégie trois par trois



1.16 Meilleure fonction de variance



La fonction de variance du plan de Hadamard est plus favorable parce que, même si sa valeur au centre est plus élevée, sa croissance est moindre à la limite du domaine: l'information est mieux répartie dans l'ensemble du domaine.

Modèle: $y = a_0 + \sum a_i x_i$

Fonction de variance:

$$\text{var}_y(\vec{x}) = f^T(\vec{x}) \cdot (X'X)^{-1} \cdot f(\vec{x})$$

avec $f^T(\vec{x}) = [1 \ x_1 \ x_2 \ x_3]$

Pour le plan en étoile:

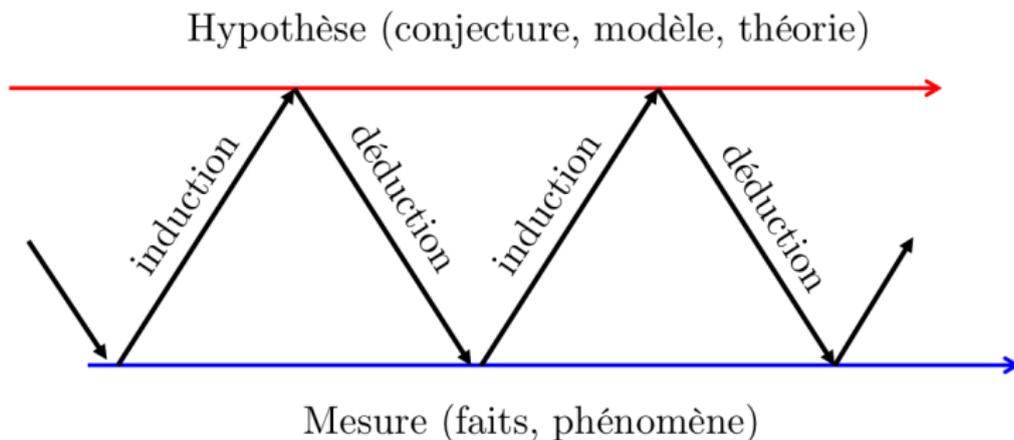
$$\text{var}_y(\vec{x}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \sum_i x_i^2$$

Pour le plan de Hadamard:

$$\text{var}_y(\vec{x}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_i x_i^2$$

2. Modélisation

2.1 Processus scientifique de modélisation



2.2 Schéma bloc



2.3 Développement de Taylor

Théorème

- I un intervalle réel
- a un élément de I
- E un espace vectoriel normé réel
- f une fonction de I dans E dérivable en a jusqu'à un certain ordre $n \geq 1$

Alors pour tout nombre réel x appartenant à I , on a

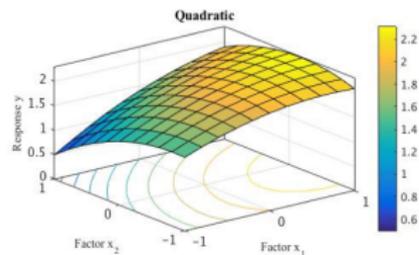
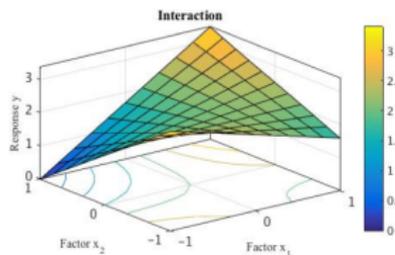
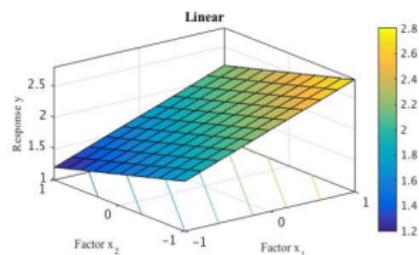
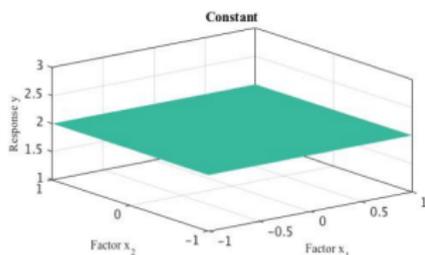
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + R_n(h)$$

On obtient alors un Polynôme de Taylor:

$$f(\vec{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \epsilon$$

2.4 Modèles empiriques

$$y(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \epsilon$$



2.5 Matrice d'expériences

Matrice $N_{exp} \times N_{fact}$ contenant les niveaux (codés ou pas) x_{ij} des facteurs pour chaque expérience:

$$E = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N_{fact}} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{N_{exp}1} & \dots & \dots & x_{N_{exp}N_{fact}} \end{bmatrix}$$

2.6 Matrice du modèle

Matrice $N_{exp} \times N_{coef}$ contenant les produits des niveaux (codés ou pas) des facteurs correspondant à chaque terme du modèle et pour chaque expérience, et correspondants à une matrice d'expériences E donnée.

Au modèle $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2$, associé à la matrice d'expériences E correspond la matrice du modèle:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{11}x_{12} & x_{11}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N_{exp}1} & x_{N_{exp}1} & x_{N_{exp}1}x_{N_{exp}1} & x_{N_{exp}1}^2 \end{bmatrix} \text{ telle que } Y = X\eta = X \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_{12} \\ a_{11} \end{bmatrix}$$

constitue un système linéaire. η est le vecteur des coefficients du modèle.

2.7 Régression par moindres carrés

Le système idéal $Y = X\eta$ est remplacé par le système $Y = X\alpha + \epsilon$
 La méthode des moindres carrés permet de déterminer α et ϵ à partir
 d'hypothèses standard sur ϵ :

$$X^T Y = X^T X \alpha + X^T \epsilon \quad (2.1)$$

$$(X^T X)^{-1} X^T Y = \alpha + (X^T X)^{-1} X^T \epsilon \quad (2.2)$$

$$\alpha = (X^T X)^{-1} X^T Y - (X^T X)^{-1} X^T \epsilon \quad (2.3)$$

$$\mathbb{E}(\alpha) = (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}(Y) - (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}(\epsilon) \quad (2.4)$$

$$\mathbb{E}(\alpha) = (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}(Y) \quad (2.5)$$

$$\hat{\alpha} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.6)$$

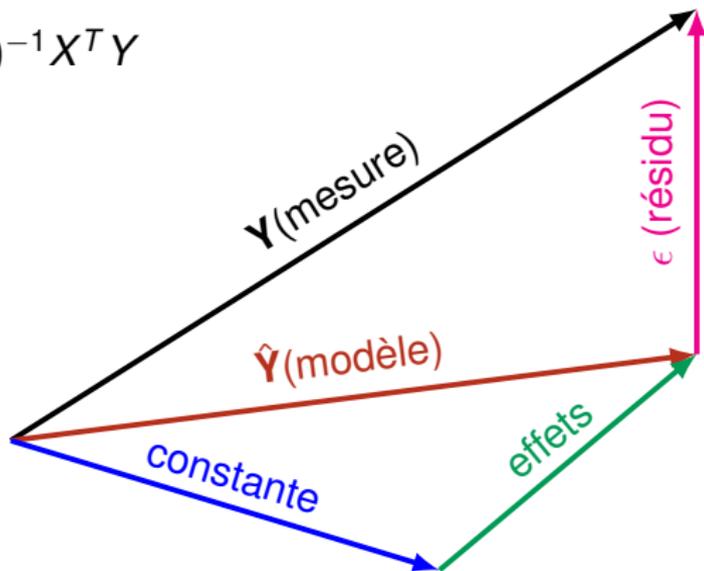
2.8 Matrice de dispersion

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

- $(X^T X)^{-1}$ représente le transfert de la variance entre la mesure des réponses et les coefficients du modèle
- Lorsque c'est possible on préférera une matrice de dispersion diagonale
- Tout au moins avec des éléments diagonaux proches de $1/N_{exp}$ et des éléments extra-diagonaux inférieurs (en valeur absolue) aux éléments diagonaux

2.9 Interprétation géométrique

$$\hat{\alpha} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$



2.10 Variance des coefficients

- $\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y = UY$ avec $U = (X^T X)^{-1} X^T$
- $\text{var}(\hat{a}) = \text{var}(UY) = UU^T \text{var}(y) = (X^T X)^{-1} \text{var}(y)$
 puisque $UU^T = (X^T X)^{-1}$
 - $\text{var}(y) \approx s^2 = \frac{\epsilon^T \epsilon}{N-P}$
 - N le nombre d'expériences
 - P le nombre de coefficients

- $\text{var}(\hat{a}) = (X^T X)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} s^2$

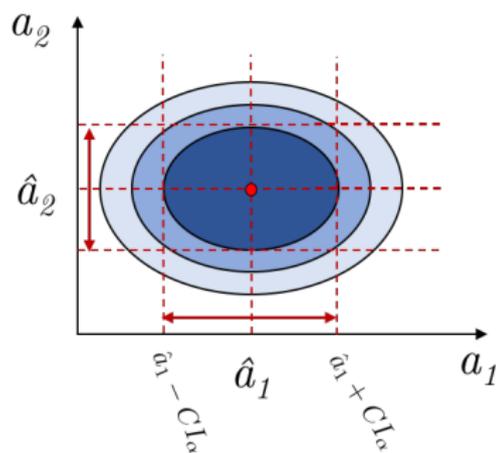
2.11 Intervalle de confiance de $\beta * 100\%$

- Si $\text{var}(\hat{a}) = (X^T X)^{-1} s^2 = D s^2$
- $\alpha = 1 - \beta$
- Degré de liberté: $\nu = (N - P)$
- Abscisse de la distribution de Student inverse: $t_{\alpha/2, \nu}$

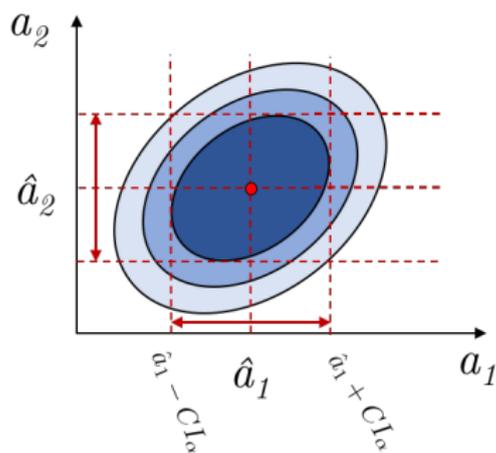
$$CI_{\beta}(a_i) = t_{\frac{\alpha}{2}, \nu} \sqrt{D_{ii} s^2}$$

2.12 Intervalles de confiance interdépendants

Estimateurs orthogonaux



Estimateurs non-orthogonaux



2.13 Concepts principaux

Planification

- Matrice d'expériences
- Matrice du modèle
- Matrice de dispersion
- Matrice d'alias

Analyse

- Coefficients du modèle
- Intervalles de confiance
- ANOVA

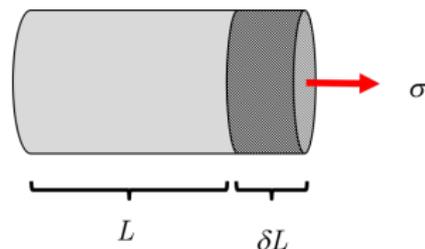
2.14 Exemple de régression multilinéaire

Loi de Hooke : $\epsilon = \frac{\delta L}{L} = \frac{\sigma}{E}$

ϵ : allongement relatif [-]

σ : contrainte [kpa]

L : longueur de l'éprouvette [m]



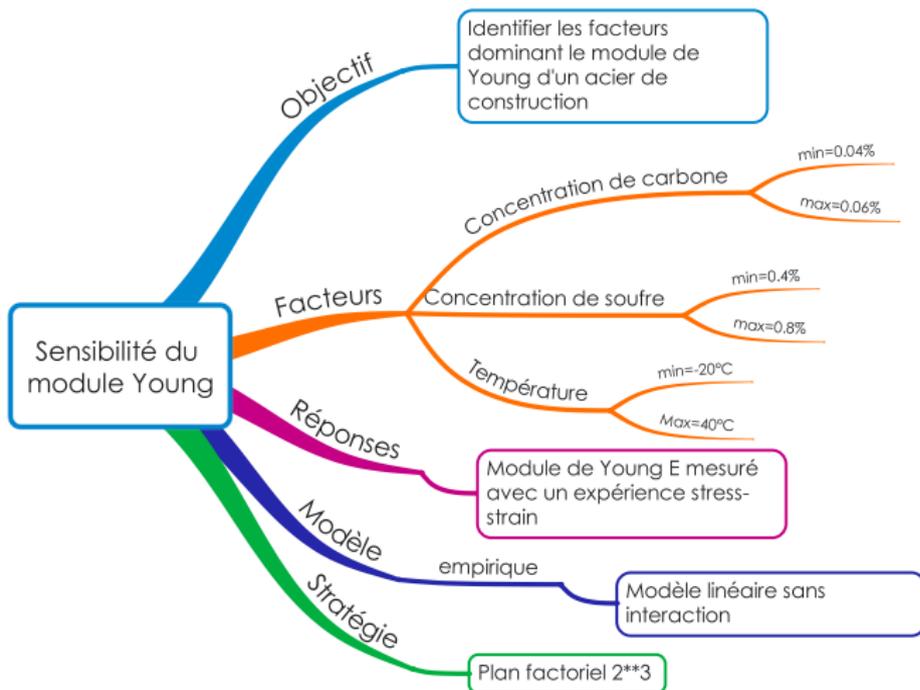
Sensibilité du module de Young : $E = f(T, C, S)$

T : température [°C]

S : concentration de soufre [%]

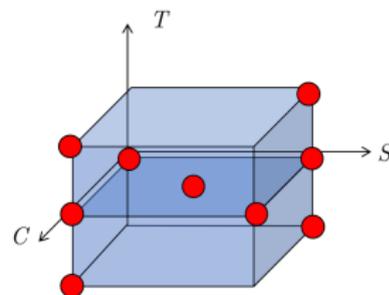
C : concentration de carbone [%]

2.15 Analyse



2.0.16 Données: Mesure du module de Young

	Carbone [%]	Soufre [%]	Température [°C]	E [kpa]
1	0.04	0.4	-20	210.31
2	0.04	0.4	0	210.37
3	0.04	0.4	20	210.28
4	0.04	0.8	0	209.18
5	0.05	0.5	0	210.31
6	0.06	0.4	0	210.81
7	0.06	0.8	-20	209.70
8	0.06	0.8	0	209.58
9	0.06	0.8	20	209.67



2.17 Système linéaire

Modèle : $E = \alpha_o + \alpha_C C + \alpha_S S + \alpha_T T + \epsilon$

Équation matricielle : $Y = X\alpha + \epsilon$

$$\begin{pmatrix} 210.31 \\ 210.37 \\ 210.28 \\ 209.18 \\ 210.31 \\ 210.81 \\ 209.70 \\ 209.58 \\ 209.67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.04 & 0.4 & -20 \\ 1 & 0.04 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0.04 & 0.4 & 20 \\ 1 & 0.04 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.05 & 0.6 & 0 \\ 1 & 0.06 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0.06 & 0.8 & -20 \\ 1 & 0.06 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.06 & 0.8 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_o \\ \alpha_C \\ \alpha_S \\ \alpha_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \\ \epsilon_7 \\ \epsilon_8 \\ \epsilon_9 \end{pmatrix}$$

2.18 Calcul de effets

Estimateur : $\hat{\alpha} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

Matrice de dispersion :

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{3.28} & -58.3 & -0.42 & 0 \\ -58.3 & \mathbf{1666} & -41.6 & 0 \\ -0.42 & -41.67 & \mathbf{4.17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0.0006} \end{pmatrix}$$

Coefficients : $\hat{\alpha}^T =$

$(210.6[kpa], 20.9[kpa/\%C], -2.9[kpa/\%S], -5 \cdot 10^{-5}[kpa/K])$

Différentielle : $dE = 20.9dC - 2.9dS - 0.00005dT$

Effets (variation de la réponse entre les extrêmes de la plage de mesure): $effet_C = 2\alpha_c \Delta C = 0.84[kpa]$, $effet_S = -2.3[kpa]$, $effet_T = -0.004[kpa]$

2.19 Faisons le point

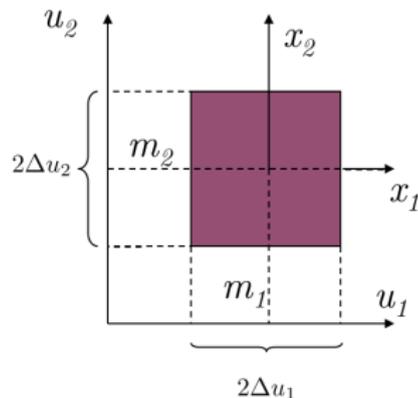
- On est parti d'une matrice d'expériences : A
- On a choisi un modèle (avec une réponse) linéaire :
$$E = \alpha_0 + \alpha_C C + \alpha_S S + \alpha_T T + \epsilon$$
- On a construit une matrice du modèle:
- On a utilisé la méthode des moindres carrés pour obtenir les coefficients du modèle
- On a évalué la qualité de la régression avec la statistique
$$R^2 = \frac{\hat{Y}^T \hat{Y}}{Y^T Y}$$
- On a utilisé le théorème de l'intervalle de confiance pour vérifier la qualité des coefficients

2.20 Standardisation de l'espace expérimental

- Variables originelles : u_j
- Variables standardisées : x_j
- Milieu de la plage :

$$m_j = \frac{\max(u_j) + \min(u_j)}{2}$$
- Demi-plage : $\Delta u_j = \frac{\max(u_j) - \min(u_j)}{2}$
- Variable standardisée : $x_j = \frac{u_j - m_j}{\Delta u_j}$
- Variable originelle :

$$u_j = m_j + x_j \Delta u_j$$



2.21 Matrice du modèle standardisée

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0.04 & 0.4 & -20 \\ 1 & 0.04 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0.04 & 0.4 & 20 \\ 1 & 0.04 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.05 & 0.6 & 0 \\ 1 & 0.06 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0.06 & 0.8 & -20 \\ 1 & 0.06 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.06 & 0.8 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.22 Calcul de effets standardisés

Estimateur : $\hat{\alpha} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

Matrice de dispersion :

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0.17} & -0.083 & 0 \\ 0 & -0.083 & \mathbf{0.17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0.25} \end{pmatrix}$$

Demi-effets :

$$\hat{\alpha}^T = (210[kpa], 0.245[kpa], -0.63[kpa], -0.053[kpa])$$

Modèle : $E = 210 + 0.24x_C - 0.63x_S - 0.053x_T$ avec $x_i \in [-1, 1]$

Effets relatifs : $ER_C = 0.11[\%]$, $ER_S = -0.3[\%]$, $ER_T = -0.07[\%]$
 ER= demi-effet divisé par la constante

2.23 Coefficients dans les unités du laboratoire

Pour avoir les coefficients dans les unités du laboratoire il faut revenir au système non standardisé. Cas d'un modèle linéaire:

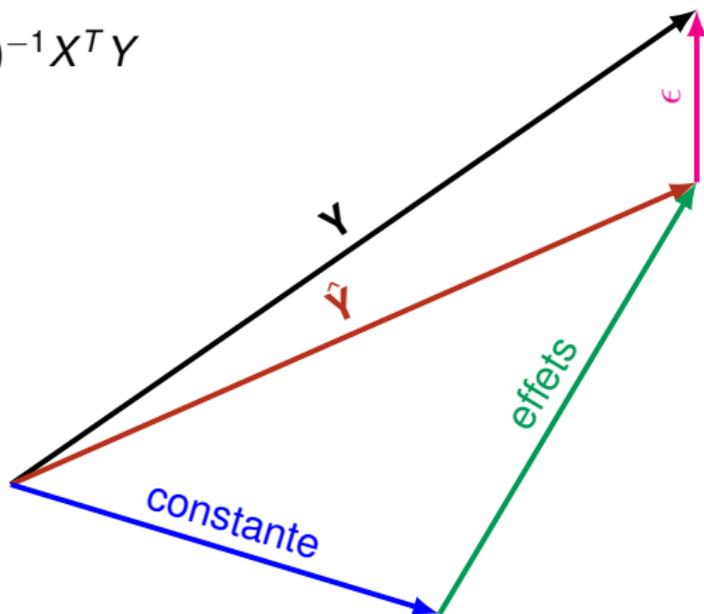
$$y = a_0 + \sum a_j x_j$$

$$x_j = \frac{u_j - \bar{u}_j}{\Delta u_j}$$

$$\begin{aligned}
 y &= a_0 + \sum a_j \frac{u_j - \bar{u}_j}{\Delta u_j} \\
 &= \left(a_0 - \sum a_j \frac{\bar{u}_j}{\Delta u_j} \right) + \sum \frac{a_j}{\Delta u_j} u_j \\
 &= b_0 + \sum b_j u_j
 \end{aligned}$$

2.24 Analyse de la variance

$$\hat{\alpha} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$



2.25 ANOVA d'un modèle

Sources	SS	DF	MS	F	p
Modèle	$SS_{\hat{Y}}$	P	$MS_{\hat{Y}} = \frac{SS_{\hat{Y}}}{P}$	$x = \frac{MS_{\hat{Y}}}{MS_{\epsilon}}$	$F(x, P, N - P)$
Résidu	SS_{ϵ}	$N - P$	$MS_{\epsilon} = \frac{SS_{\epsilon}}{N - P}$		
Total	SS_Y	N	–		

N est le nombre d'expériences et P , le nombre de coefficients du modèle

2.26 ANOVA Essais de traction

Sources	SS	DF	MS	F	p
Modèle	396'990.2	4	99'247.5778	4'785'322	1.22 10 ⁻¹⁶
Résidu	0.1	5	0.0207		
Total	396990.3	9	–		

Mais le 99% vient de la constante? Ça ne donne finalement pas beaucoup d'information sur la qualité du modèle.

2.27 ANOVA Essais de traction sans la constante

Sources	SS	DF	MS	F	p
Modèle (sans const)	2.0027	3	0.66757	32.187	0.11%
Résidu	0.1	5	0.02074		
Total	2.1064	9	–		

L'analyse sans la constante est déjà plus "critique". Cependant on aimerait savoir si tous les coefficients du modèle sont significatifs.

2.28 Le concept d'alias

- Alias: Zorro et Diego de la Vega
- Concept utile pour gérer les situations non-orthogonales
- Permet d'évaluer l'impact d'une partie d'un modèle sur une autre
- Par exemple pour un plan d'expériences donné, quel est l'effet de calculer les coefficients du deuxième degré sur les autres coefficients ?

2.29 La matrice d'alias

- Soit un modèle linéaire $Y = f(x_1, \dots, x_N, a_0, a_1, \dots, a_M)$ et un plan d'expériences dont la matrice du modèle est X
- On considère deux parties du modèle tel que $f = f_1 + f_2$ et leurs matrices du modèle correspondantes X_1 et X_2 tels que $X = [X_1, X_2]$
- La matrice des alias A entre les deux parties du modèle se calcule ainsi:

$$A = (X_1^T X_1)^{-1} (X_1^T X_2)$$

2.30 Exemple de matrice d'alias

- Soit le plan E et modèle

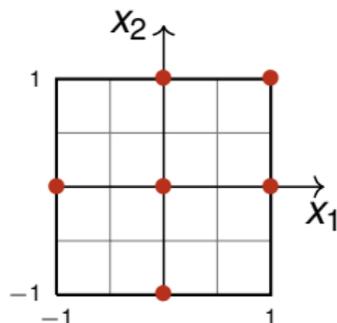
$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2$$

- La partition est entre la partie linéaire et l'interaction:

$$\begin{cases} f_1(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ f_2(x) = a_{12} x_1 x_2 \end{cases}$$

- $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2.31 Exemple de matrice d'alias

$$\begin{aligned}
 A &= (X_1^T X_1)^{-1} (X_1^T X_2) \\
 &= \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 17 & -5 \\ -2 & -5 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 17 & -5 \\ -2 & -5 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/11 \\ 5/22 \\ 5/22 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Plan de Hadamard

3.1 Plan de Hadamard

- Plan basé sur des *matrices orthogonales* constituées de -1 et $+1$,
- *Plackett-Burman design* dans la littérature anglo-saxonne,
- Permet une estimation optimale des effets principaux α_j d'un système sans interaction (importante),
- Idéal pour le tri des facteurs (screening, analyse Pareto),
- Les matrices se construisent à partir d'un générateur (une première ligne de la matrice d'expériences),
- Il existe de plans de Hadamard pour les multiples de 4

3.2 Générateurs des plan de Hadamard

- 8 expériences, 7 facteurs max:
+ + + - + - -
- 12 expériences, 11 facteurs max:
+ + - + + + - - - + -
- 16 expériences, 15 facteurs max:
+ - + - + - + - + - + - + - +
- 20 expériences, 19 facteurs max:
+ + - - + + + + - + - + - - - - + + -
- 24 expériences, 23 facteurs max:
+ + + + + - + - + + - - + + - - + - + - - - - -
- Ressource : <http://neilsloane.com/hadamard/>

3.3 Construction d'un plan de Hadamard

| | |
|---|---------------|
| Première ligne= générateur | + + + - + - - |
| (N-2) lignes suivantes:
permutations circulaires | - + + + - + - |
| | - - + + + - + |
| | + - - + + + - |
| | - + - - + + + |
| | + - + - - + + |
| | + + - + - - + |
| Dernière ligne de -1 | - - - - - - - |

Le nombre de '+' et de '-' de chaque colonne doit être équilibré !

3.4 Cas particulier pour les moindres carrés

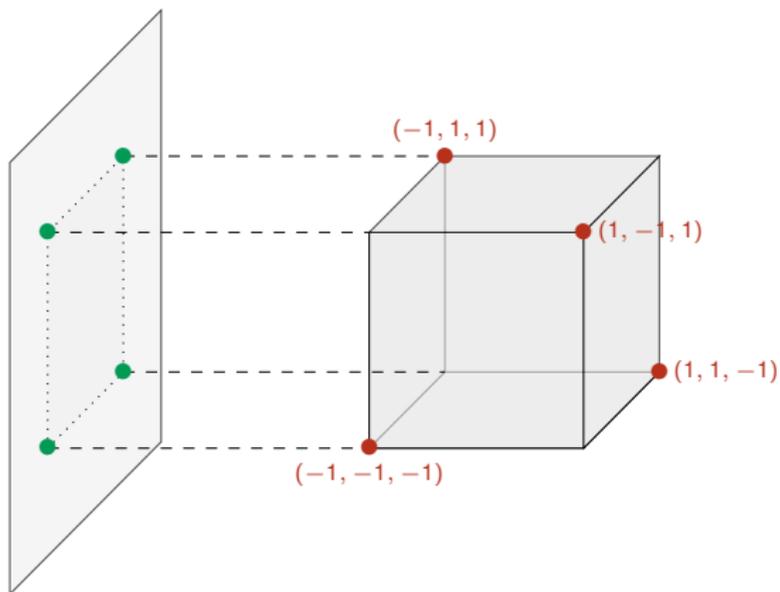
Le système $Y = X\alpha + \epsilon$ a pour solution $\hat{\alpha} = (X'X)^{-1} X'Y$ et $\hat{\epsilon} = Y - X\hat{\alpha}$

Cependant $(X'X)^{-1} = \frac{1}{N_{exp}} I_{N_{exp}}$, donc $\hat{\alpha} = \frac{1}{N_{exp}} X'Y$

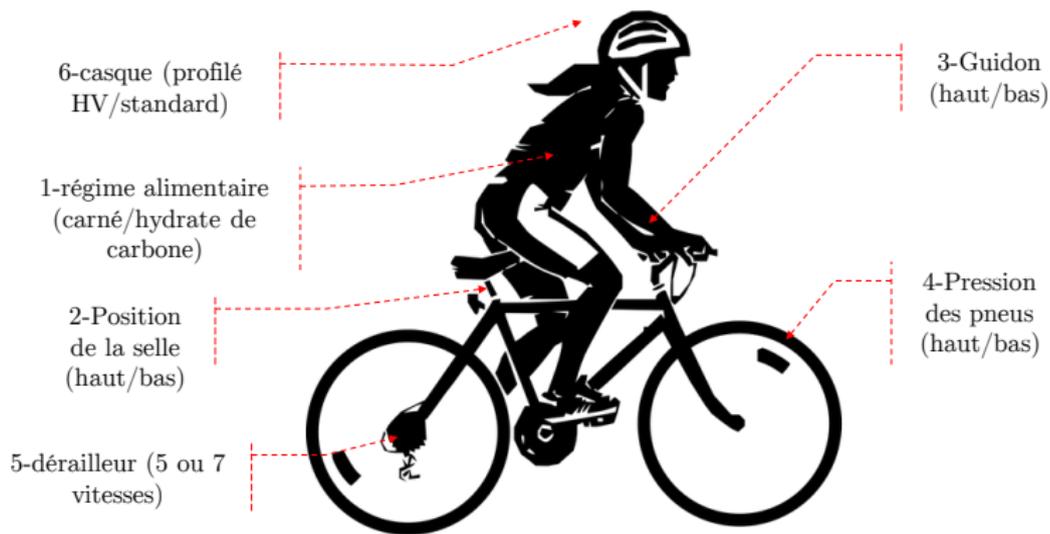
Exemple: H_4

$$(H_4' H_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

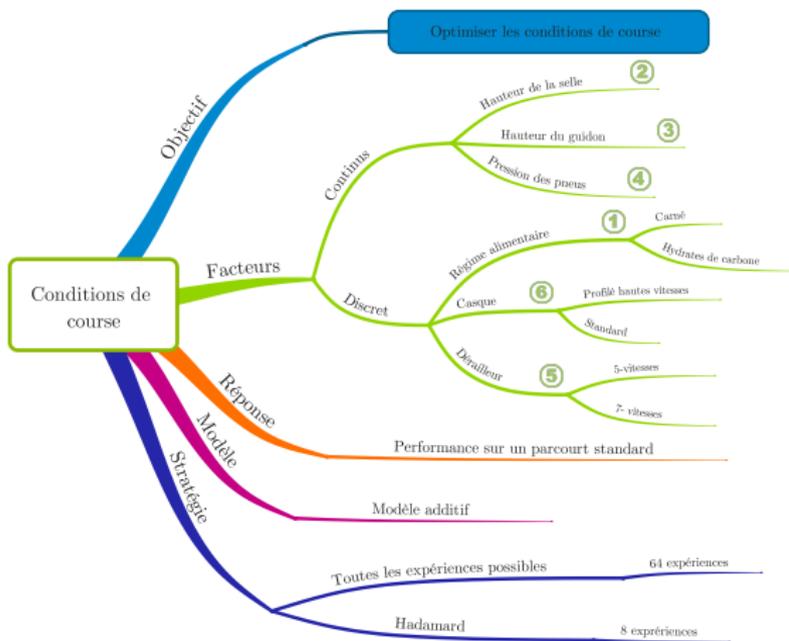
3.5 Projectivité



3.6 Facteurs de l'optimisation



3.7 Analyse



3.8 Plan de Hadamard H_8

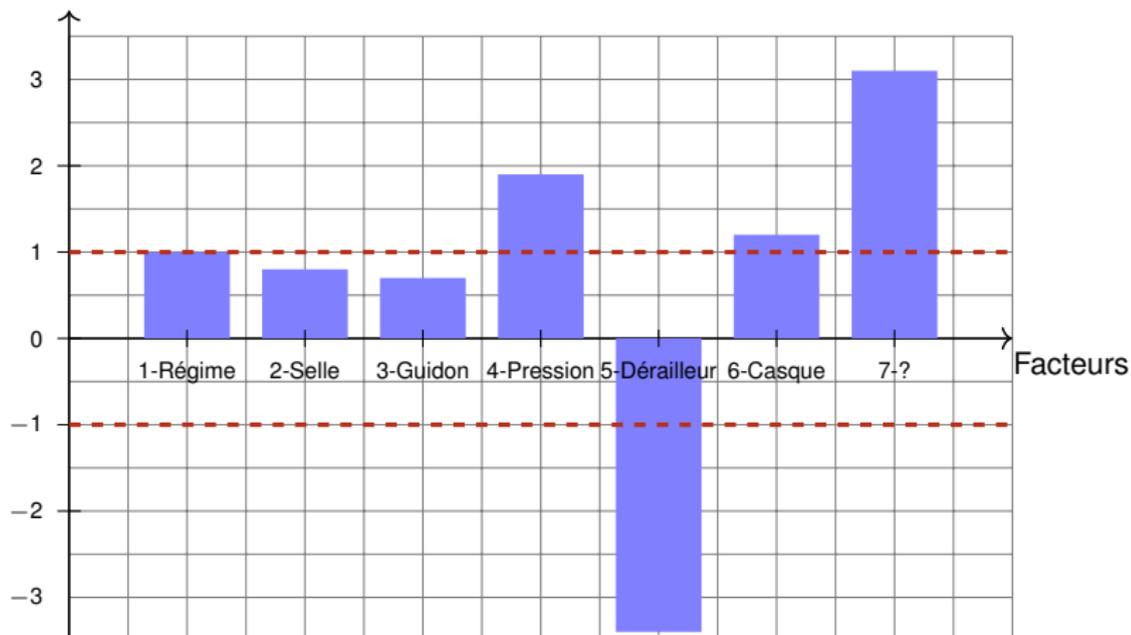
Table: Plan de Hadamard de 8 expériences

| | Régime | Selle | Guidon | Pression | Dérailleur | Casque | - |
|---|---------|-------|--------|----------|------------|----------|----|
| + | carné | haute | haut | haute | 7 vitesses | profilé | - |
| - | h de c. | basse | bas | basse | 5 vitesses | standard | - |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 3 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 4 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 6 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 7 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 8 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |

3.9 Inférence des effets

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 35.7 \\ 32.8 \\ 24.2 \\ 36.5 \\ 30.1 \\ 26.0 \\ 35.5 \\ 22.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.4 \\ 1.0 \\ 0.8 \\ 0.7 \\ 1.9 \\ -3.4 \\ 1.2 \\ 3.1 \end{pmatrix}$$

3.10 Diagramme à barre des effets



3.11 Alias entre effets principaux et interactions

$$y_1 = a_0 + \sum_i a_i x_i = X_1 \alpha$$

$$y_2 = \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j = X_2 \alpha_2$$

$$A = (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 = \frac{1}{8} X_1' X_2$$

$$l_1 = a_1 + a_{23} + a_{45}$$

$$l_2 = a_2 + a_{13} + a_{46}$$

$$l_3 = a_3 + a_{12} + a_{56}$$

$$l_4 = a_4 + a_{15} + a_{26}$$

$$l_5 = a_5 + a_{14} + a_{36}$$

$$l_6 = a_3 + a_{24} + a_{35}$$

$$l_7 = a_{16} + a_{25} + a_{34}$$

| | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 23 | 24 | 25 | 26 | 34 | 35 | 36 | 45 | 46 | 56 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| a_0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| a_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| a_3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| a_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a_5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| a_6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a_7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

3.12 Full foldover

| Plan | Matrice des essais | Matrice du modèle |
|---------------|---|---|
| Hadamard | E | $[1 \quad E]$ |
| Foldover | $-E$ | $[1 \quad -E]$ |
| Full foldover | $\begin{bmatrix} E \\ -E \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & E \\ 1 & -E \end{bmatrix}$ |

3.13 Dé-aliasage avec un plan *full foldover*

$$[1 \quad E]$$



$$\begin{aligned} l_1 &= a_1 + a_{23} + a_{45} \\ l_2 &= a_2 + a_{13} + a_{46} \\ l_3 &= a_3 + a_{12} + a_{56} \\ l_4 &= a_4 + a_{15} + a_{26} \\ l_5 &= a_5 + a_{14} + a_{36} \\ l_6 &= a_6 + a_{24} + a_{35} \\ l_7 &= a_{16} + a_{25} + a_{34} \end{aligned}$$

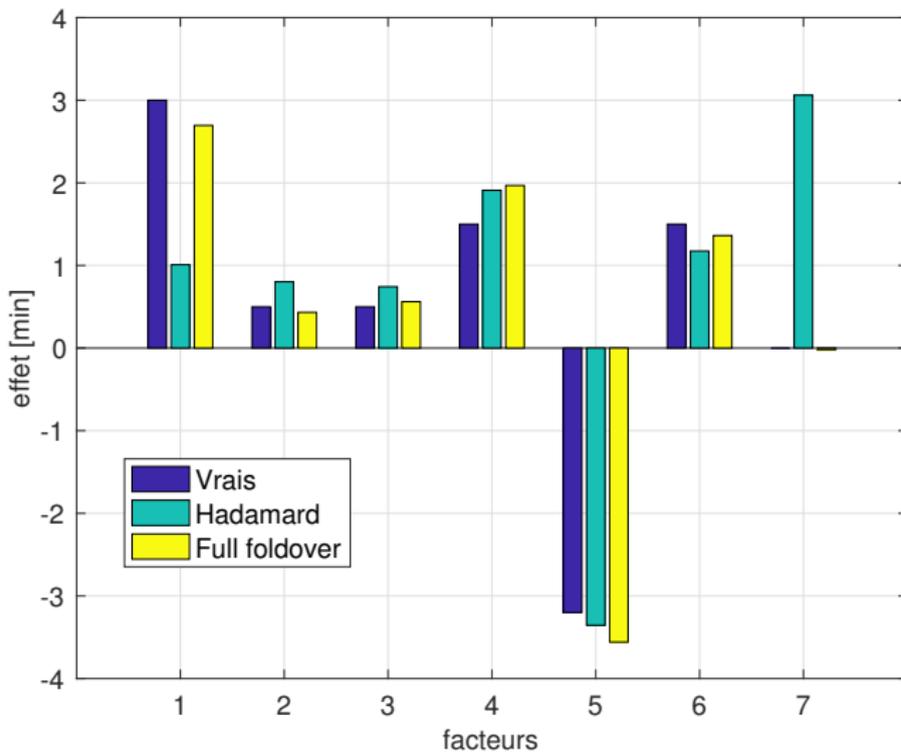
$$[1 \quad -E]$$



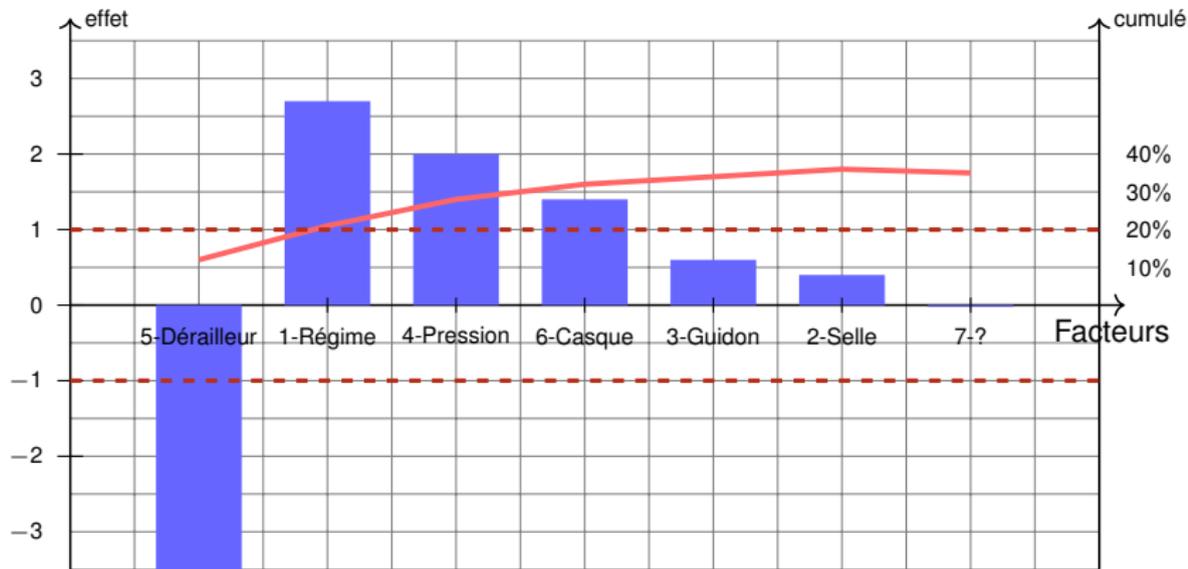
$$\begin{aligned} l_1 &= a_1 - a_{23} - a_{45} \\ l_2 &= a_2 - a_{13} - a_{46} \\ l_3 &= a_3 - a_{12} - a_{56} \\ l_4 &= a_4 - a_{15} - a_{26} \\ l_5 &= a_5 - a_{14} - a_{36} \\ l_6 &= a_6 - a_{24} - a_{35} \\ l_7 &= -a_{16} - a_{25} - a_{34} \end{aligned}$$

3.14 Inférence des effets dé-aliasés

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 35.7 \\ 32.8 \\ 24.2 \\ 36.5 \\ 30.1 \\ 26.0 \\ 35.5 \\ 22.1 \\ 28.4 \\ 24.2 \\ 26.2 \\ 32.9 \\ 21.8 \\ 45.1 \\ 25.8 \\ 35.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.1 \\ 2.7 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 2.0 \\ -3.6 \\ 1.4 \\ -0.02 \end{pmatrix}$$



3.15 Diagramme des effets avec le plan full foldover



3.16 Interactions avec le plan full foldover

Dans le cas présent, il est possible

- d'identifier les interactions existantes a_{23} , a_{25} et a_{35}
- de voir quelles ne sont pas aliasées entre elles dans le plan full foldover
- de compléter la matrice du modèle avec les colonnes x_2x_3 , x_2x_5 et x_3x_5
- d'estimer les interactions

3.17 Résumé - Plans de Hadamard

- Meilleure estimation des effets principaux : $var(\alpha_j) = \frac{\sigma^2}{N_{exp}}$
- Structure des alias différente pour chaque matrice de Hadamard
- Possibilité de dé-aliaser les effets principaux des interactions de 1er ordre à l'aide d'un plan complémentaire
- Possibilité d'estimer des interactions s'il y en a peu et qu'elles sont identifiables
- Il existe d'autres plans de *screening* tels que des plans hypersaturés

4. Plan de Doehlert

4.1 Les deux objectifs des plans d'expériences

- 1 Quantifier les effets des facteurs x_i sur la réponse y en un nombre minimal d'expériences pour :

- Sélectionner les facteurs significatifs
- Quantifier les effets
- Faire une analyse de Pareto (classer les effets par ordre d'importance)

Pour cet objectif des modèles (méta-modèles) du premier degré avec ou sans interactions sont suffisants:

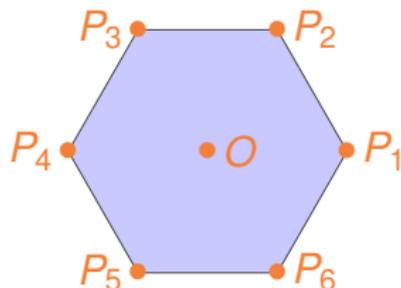
$$a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i < j}^n a_{ij} x_i x_j$$

- 2 Déterminer la combinaison optimale des facteurs qui permet d'optimiser la réponse toujours en un nombre minimal d'expériences.
Pour cet objectif des modèles (méta-modèles) du second degré sont nécessaires

$$a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i \leq j}^n a_{ij} x_i x_j$$

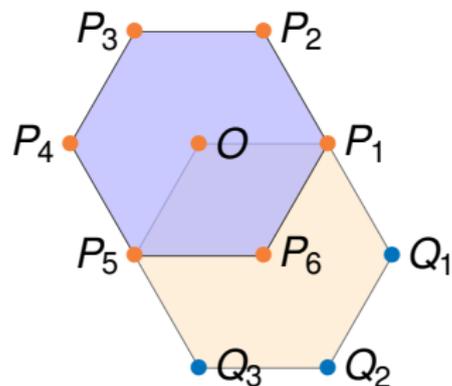
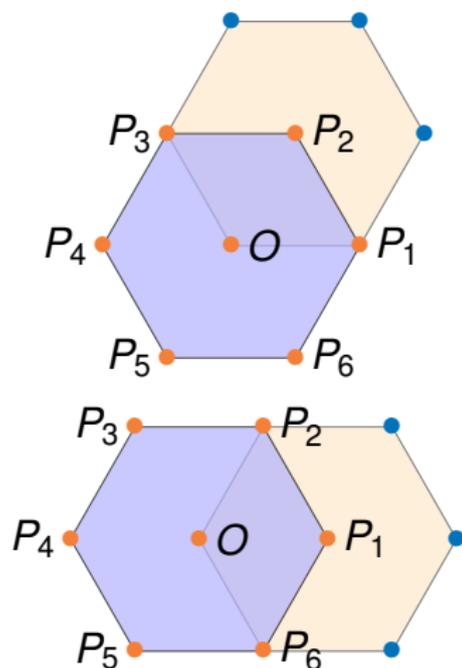
4.2 Plan de Doehlert 2D

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

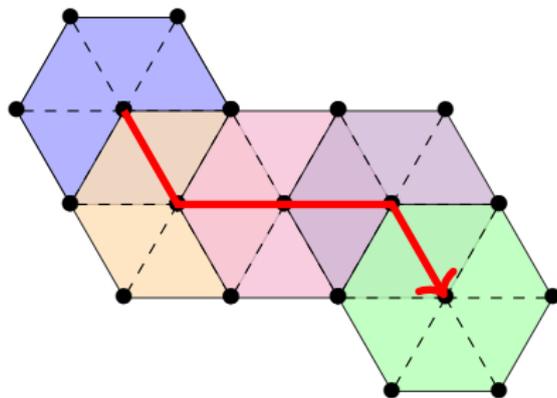


- 2 facteurs: 7 points de mesures, 3 et 5 niveaux par facteur,
- Pas d'expériences aux sommets
- Isovariant par rotation

4.3 Shift d'un plan de Doehlert 2D



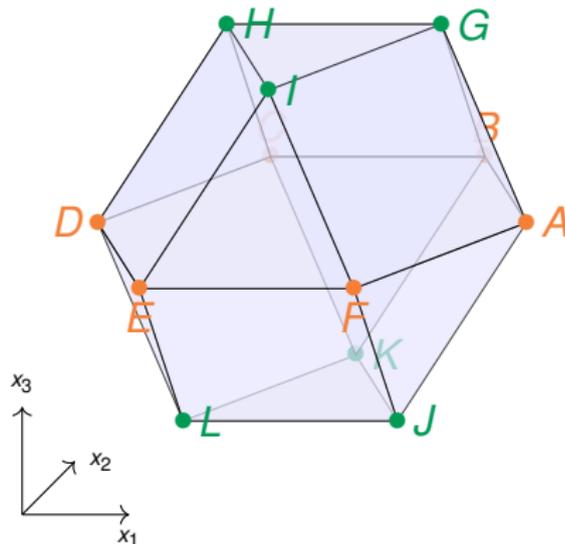
4.4 Méthode du simplexe hexagonal



- Exploration séquentielle du domaine ($7+3+3+3+3=19$ exp)

4.5 Plan de Doehlert 3D

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$



4.6 Séquentialité dans les plans de Doehlert

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} & \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{10}}{20} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{10}}{20} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{10}}{20} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{10}}{20} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

4.7 Géométrie du second degré

- On a donc la fonction $a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i \leq j}^n a_{ij} x_i x_j$

$$y = a_0 + (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & & \frac{1}{2} a_{1n} \\ & \ddots & \\ \frac{1}{2} a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- On peut écrire cette fonction vectoriellement:

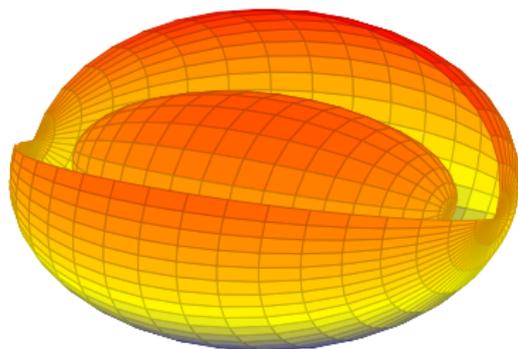
$$y = a_0 + \vec{x} \cdot \vec{a} + \vec{x}^T A \vec{x}$$

- Les *isosurfaces* de cette fonction sont soit des ellipsoïdes, soit des hyperboloïdes

4.8 Isosurfaces d'une fonction quadratique

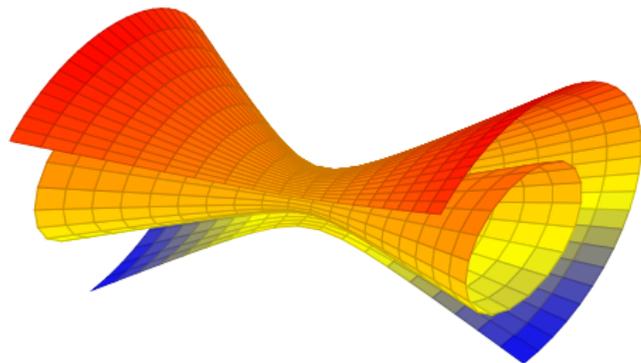
Ellipsoïde

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = y$$



Hyperboloïde

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = \pm y$$



4.9 Analyse canonique - point fixe

- Mais on ne connaît pas le centre de la figure, ni l'orientation des axes, ni le rapport des axes !
- L'analyse canonique consiste à déterminer ces deux informations
- On commence par identifier le centre de la figure qui est soit un extremum soit un point selle.
- On cherche donc le point correspondant à $\nabla y = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = a_i + a_{1i}x_1 + \dots + 2a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = 0$$

$$0 = \vec{a} + 2A\vec{x}$$

$$\vec{x}_s = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{a}$$

$$y_s = a_0 + \vec{x}_s \cdot \vec{a} + \vec{x}_s^T A \vec{x}_s$$

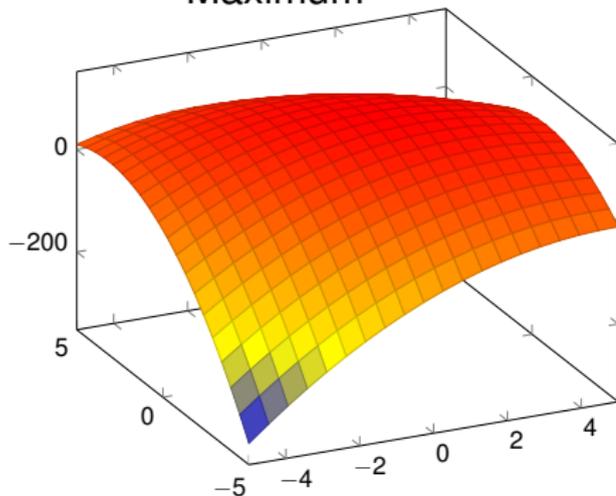
4.10 Analyse canonique - axes principaux

- Les axes principaux sont les vecteurs propres de A , $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$
- L'accroissement de la fonction $y = f(\vec{x})$ dans la direction des axes principaux est donné par les valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
- Donc dans les directions où les valeurs propres sont plus grandes, les ligne de niveaux sont plus rapprochées
- La fonction y peut être ré-écrite canoniquement

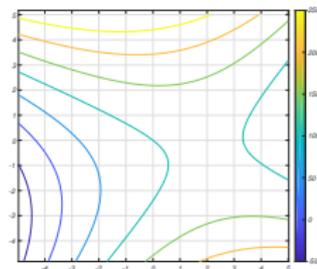
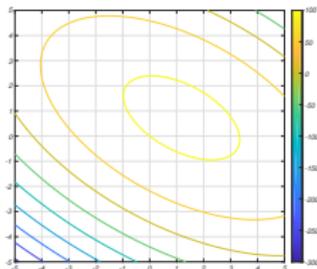
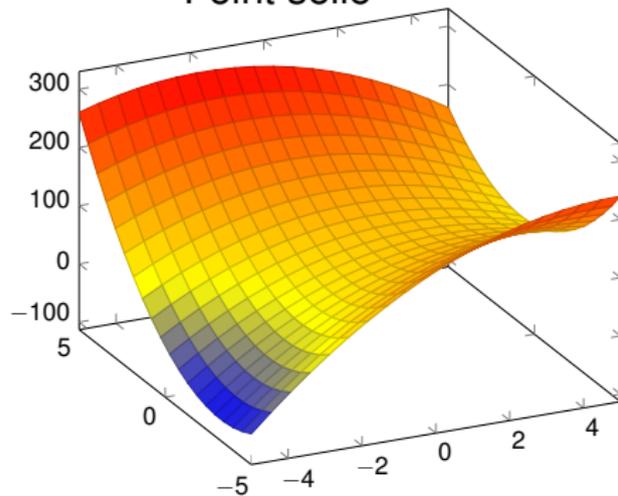
$$y = y_s + \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{X}_i^2$$

- si toutes les valeurs propres sont de même signe, on a affaire à un ellipsoïde, dans le cas contraire à un hyperboloïde

Maximum



Point selle



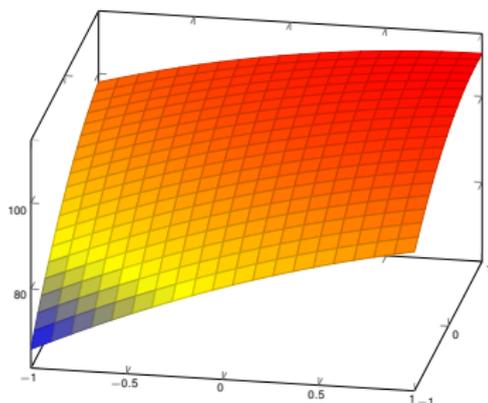
4.11 Analyse canonique - exemple

- Modèle original

$$y = 100 + 10x_1 + 12x_2 - 4x_1x_2 - 3x_1^2 - 5x_2^2$$

- Détermination du point fixe

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_s = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 0.73 \end{pmatrix}$$

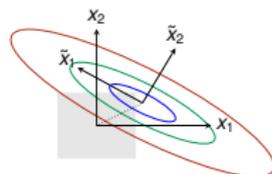


- Valeurs et vecteurs propres

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1.8 \\ \lambda_2 = -6.2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tilde{x}_1 = -0.85 \hat{x}_1 + 0.53 \hat{x}_2 \\ \tilde{x}_2 = 0.53 \hat{x}_1 + 0.85 \hat{x}_2 \end{cases}$$

- Modèle canonique

$$\tilde{y} = 110.3 - 1.8 \tilde{x}_1^2 - 6.2 \tilde{x}_2^2$$



5. Conclusion

5.1 Conclusions

- Le cours a abordé trois aspects
 - la modélisation statistique
 - un plan de criblage
 - un plan d'optimisation
- Un concept clé est celui de matrice de dispersion qui est la pierre angulaire du DOE. Cette matrice décrit la qualité de votre "télescope"
- Il s'agit d'un échafaudage: restez prudents avec ces éléments qu'il faut fortifier avec une compréhension de l'inférence statistique
- "Tous les modèles sont faux, mais certains sont très utiles"

5.2 Il reste beaucoup à découvrir...

- Au niveau des plans, le cours a présenté l' α et l' Ω . Il reste beaucoup d'autres plans, soit pour des facteurs qualitatifs, soit pour se focaliser sur les interactions des facteurs, etc.
- Le cours a aussi été léger sur l'inférence statistique. Un concept clé qu'il faudrait aborder est l'ANOVA, avec encore d'autres outils complémentaires ou alternatifs.
- Une possibilité est de suivre le cours Master PHYS-442

5.3 Références

- Box, G., et al (2000), Statistics for experimenters, Wiley.
- Montgomery, D. (2009), Design and analysis of experiments, Wiley.
- Ryan, Th. (2007), Modern Experimental design, Wiley.
- Saltelli, A. (2000), Sensitivity analysis, Wiley.

Le stratège victorieux cherche la bataille après avoir gagné la guerre, alors que celui destiné à la déroute commence par se battre et essaye ensuite de gagner.

Sun Tzu, L'art de la guerre