8.1. Montrer que si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont deux variétés riemanniennes, alors il existe une unique métrique Riemannienne $g = g_1 \oplus g_2$ sur $M_1 \times M_2$ telle que M_1 et M_2 soient plongées isométriquement et orthogonalement en chaque point dans $M_1 \times M_2$.
Montrer ensuite que si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont complètes, alors $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$ est complète.

8.2. Montrer qu'une variété riemannienne homogène (i.e telle qu'il existe un groupe d'isométries agissant transitivement) est complète.

8.3. On suppose qu'une variété riemannienne (M, g) est complète et isotrope en chaque point (i.e, pour tout point p le groupe des isométries G_p qui fixent p est transitif sur les vecteurs de mêmes normes de T_pM). Montrer que M est homogène.

Indication : étant donné deux points, considérer le milieu de la géodésique qui joint p à q.

8.4. (*) Soit(M, g) une variété riemannienne complète et non compacte. Montrer qu'il existe une courbe $\gamma : [0, +\infty[$ telle que pour tous $s, t > 0$,

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$$

On dit qu'une telle courbe est un rayon géodésique.

8.5. Une courbe $\gamma : [0, \infty) \to M$ est *divergente* si pour tout compact $K \subset M$ il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a $\gamma(t) \notin K$.

Montrer qu'une variété riemannienne (M, g) est complète si et seulement si toute courbe divergente est de longueur infinie.

8.6. ($\star$) Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte.
Montrer que dans chaque classe d'homotopie non triviale $\mathcal{C}$, il existe une géodésique fermée lisse dont la longueur est minimale dans $\mathcal{C}$.